



ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ-2 - 3016.2

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	11 математика і статистика
Спеціальність	113 прикладна математика
Освітня програма	Наука про дані та математичне моделювання
Статус дисципліни	Нормативна
Форма навчання	очна(денна)
Рік підготовки, семестр	3 курс, осінній семестр
Обсяг дисципліни	4 кредити / 120 год., (36 год.-лекції, 18 год.-практичні заняття, СРС 66 год.)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	екзамен / МКР, поточний контроль
Розклад занять	https://schedule.kpi.ua/
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: доктор фіз.-мат. наук, професор, Лось Валерій Миколайович, v_los@yahoo.com Практичні / Семінарські: кандидат технічних наук, доцент, Андрусенко Олена Миколаївна
Розміщення курсу	Slack

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Теорія диференціальних рівнянь є одним із центральних розділів математики. Поняття та методи цієї теорії дозволяють на строгому математичному рівні формувати постановки як класичних, так і сучасних математичних задач та будувати їх розв'язки. Диференціальні рівняння знаходять свої застосування практично в усіх областях математики.

Предметом дисципліни є методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь і систем першого та вищих порядків, диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку; дослідження існування, єдиності, стійкості розв'язків диференціальних рівнянь.

Мета та завдання кредитного модуля

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів таких знань:

- загальної теорії систем звичайних диференціальних рівнянь;
- постановки та умов єдиності розв'язку задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь;
- теорії крайових задач другого порядку в тому числі задачі Штурма-Ліувіля;
- геометричного підходу до теорії звичайних диференціальних рівнянь;
- стійкість нерухомих точок в сенсі Ляпунова та методи дослідження на стійкість;
- теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та постановки

задачі Коші до них;
та умінь:

- розв'язувати задачу Коші для систем диференціальних рівнянь;
- будувати фазові портрети систем диференціальних рівнянь;
- аналізувати нелінійні рівняння та досліджувати стійкість нерухомих точок, як безпосередньо через функцію Ляпунова так і через дослідження відповідної лінеаризованої системи;
- розв'язувати задачу Коші для рівнянь з частинними похідними першого порядку;
- використовувати методи диференціальних рівнянь в теоретичних і прикладних дослідженнях.

Основні завдання навчальної дисципліни.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти набудуть такі **компетентності**:

- здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями,
- здатність генерувати нові ідеї (креативність),
- здатність бути критичним і самокритичним,
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу,
- знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності,
- здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем,
- здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі,
- здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.

Програмними результатами навчання є:

- демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці;
- володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами;
- уміти розробляти та використовувати на практиці алгоритми, пов'язані з апроксимацією функціональних залежностей, чисельним диференціюванням та інтегруванням, розв'язанням систем алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь, розв'язанням крайових задач, пошуком оптимальних рішень;
- володіти основними методами розробки дискретних і неперервних математичних моделей об'єктів та процесів, аналітичного дослідження цих моделей на предмет існування та єдиності їх розв'язку;
- вміти проводити практичні дослідження та знаходити розв'язок некоректних задач;
- розв'язувати окремі інженерні задачі та/або задачі, що виникають принаймні в одній предметній галузі: в соціології, економіці, екології та медицині;
- уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу;
- вміти формулювати та розв'язувати задачі з динаміки матеріальної точки.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

~ дисципліні «Диференціальні рівняння» передують дисципліни «Математичний аналіз» навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика;
~ дисципліна «Диференціальні рівняння» забезпечує вивчення дисципліни «Математичне моделювання» навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика.

3. Зміст навчальної дисципліни

Кредитний модуль 1. Системи диференціальних рівнянь

РОЗДІЛ 1 КРАЙОВІ ЗАДАЧІ.

Тема 1.1 Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку

Тема 1.2 Задача Штурма-Ліувілля

РОЗДІЛ 2 СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Тема 2.1 Системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Тема 2.2 Лінійні системи та експоненти операторів

Тема 2.3 Стійкість розв'язків за Ляпуновим

РОЗДІЛ 3 РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Тема 3.1 Основи теорії рівнянь в частинних похідних першого порядку

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Турчина Н.І. Звичайні диференціальні рівняння: методи розв'язування та застосування. . – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 329 с.
https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/24974/1/Dyferentsialni_rivniannia.pdf
2. Лось В. М., Мальчиков В. В. Звичайні диференціальні рівняння: навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 66 с.
https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/45083/1/Los_Malchikov_Zvychaini-dyferentsialni-rivniannia.pdf
3. А.М. Самойленко, , М.О. Перестюк, І.О. Парасюк Диференціальні рівняння Київ, Либідь, 2003 - 600с.
4. А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ, В.Школа, 1994 - 455с.

Допоміжна література

5. Збірник задач з диференціальних рівнянь : навч. посіб. / кол. авт.: П. І. Каленюк, П. П. Костробій, З. М. Нитребич та ін. ; за ред. проф. П. І. Каленюка. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. – 232 с.
6. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу – К: Вища школа, 1974. – 456 с.

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

Кредитний модуль 1. Системи диференціальних рівнянь

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Крайові задачі для рівнянь другого порядку. Самоспряжений вигляд ЛНДР. Зведення ЛНДР до самоспряженого вигляду. Формула Гріна. Поняття про крайову задачу. Різні типи крайових умов.
2	Функція Гріна, її побудова. Розв'язування крайової задачі з використанням функції Гріна.
3-4	Задача Штурма-Ліувілля. Деякі властивості власних чисел та власних функцій. Теорема Стеклова.
5	Поняття про системи диференціальних рівнянь. Нормальні системи. Основні поняття Лінійні однорідні і неоднорідні системи (ЛОС і ЛНС). ЛОС зі сталими коефіцієнтами. Побудова ФСР ЛОС у випадку простих власних значень.
6	ЛОС зі сталими коефіцієнтами. Побудова ФСР ЛОС у випадку кратних власних значень.
7-8	Експонента матриці. Поняття про банахову алгебру. Означення $\exp(x)$, де x це елемент банахової алгебри. Множина квадратних матриць розміру n - приклад банахової алгебри. Означення $\exp(A)$, де A - квадратна матриця. Властивості $\exp(A)$. Обчислення $\exp(A)$. Розв'язування ЛОС за допомогою $\exp(A)$.
9	Метод варіації довільних сталих розв'язування лінійних неоднорідних систем (ЛНС).
10	Фазові портрети автономних систем (початок). Поняття автономної системи. Фазова крива, фазовий портрет. Розв'язок автономної системи, який називається положенням рівноваги. Поведінка розв'язків лінійної системи біля положення рівноваги (випадки різних дійсних власних чисел). Відповідні фазові портрети (стійкий і нестійкий вузол, седло).
11	Фазові портрети автономних систем (продовження). Дикритичний вузол, вироджений вузол, фокус, центр. Біфуркаційна діаграма.
12	Елементи теорії стійкості (початок). Означення стійкості за Ляпуновим Означення асимптотичної стійкості Геометрична інтерпретація стійкості та асимптотичної стійкості.
13	Стійкість лінійних систем.

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
	Еквівалентність стійкості будь-якого розв'язку лінійної однорідної системи і стійкості її нульового розв'язку. Умови стійкості (асимптотичної стійкості) ЛОС. Умови стійкості (асимптотичної стійкості) ЛОС зі сталими коефіцієнтами.
14	Критерій Рауса-Гурвіца. Приклади застосування. Лінеаризація автономної системи. Стійкість за першим наближенням.
15	Функції Ляпунова. Означення додатно(від'ємно)визначеної функції. Означення похідної в силу системи (повної похідної функції за часом). Означення функції Ляпунова. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість.
16	Умови нестійкості. Теорема Четаєва.
17	Перший інтеграл нормальної системи диф. рівнянь. Системи диф. рівнянь у симетричній формі.
18	Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку (ДРЧП першого порядку). Простіші ДРЧП. Квазілінійні ДРЧП першого порядку (зведення до симетричної системи диф. рівнянь).

Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
1	Крайові задачі. Функція Гріна.
2	Задача Штурма-Ліувілля.
3	Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку (випадок простих власних значень).
4	Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку (випадок кратних власних значень).
5	Системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку.
6-7	Фазові портрети автономних систем.
8	Дослідження на стійкість систем ДР. Критерій Рауса-Гурвіца. Лінеаризація автономної системи. Стійкість за першим наближенням.
9	Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку.

6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студента полягає:

- підготовка до лекційних та практичних занять – систематично до 2 год. на заняття,
- підготовка до модульних контрольних робіт - до 5 год на роботу,
- підготовка до колоквіуму - до 5 год.
- підготовка до екзамену - до 20 год.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

1. Систематичне відвідування лекційних і практичних занять.
2. Перескладання (переписування) модульної контрольної роботи не передбачене.
3. У випадку дистанційного навчання і недостатньої кількості балів (менше 60) в кінці семестру може бути дано додаткові завдання, щоб добрати бали до 60.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Рейтинг студента з кредитного модуля складається з:

- 1) балів за виконання модульної контрольної роботи;
- 2) балів за активність на практичних заняттях
- 3) балів за відповідь на екзамені (очна форма навчання) або на колоквіумі (дистанційна форма навчання)

СИСТЕМА РЕЙТИНГОВИХ БАЛІВ

1. Бали за модульну контрольну роботу

Модульна контрольна робота поділяється на дві 45-хвилинні контрольні роботи, що проводяться у вигляді тестів. Завдання на тестові контрольні роботи містять по 10 типових практичних прикладів.

Кількість балів за розв'язання кожного прикладу: 1,5 бали.

Критерії оцінювання:

1,5 – правильна відповідь;

0 – неправильна відповідь;

Викладач має право після завершення тесту вибірково запросити фотокопії студентських робіт та поставити нуль балів за завдання, розв'язання яких буде відсутнє чи неправильне.

Максимальна кількість балів за модульний контроль:

$1,5 \text{ бали} \times 10 \text{ завд.} \times 2 \text{ тест. контр. роб.} = 30 \text{ балів.}$

2. Бали за активність на практичних заняттях

Бали нараховуються за плідну роботу та відповіді на практичних заняттях. Але не більше ніж **10 балів** протягом усього семестру.

1 бал --- самостійно правильно розв'язане завдання і прокоментоване розв'язання

0.5 бала --- плідна робота на практичному занятті (ці бали нараховуються, якщо студент виконав усі практичні завдання, які розв'язувалися на практичному занятті)

0 балів --- пасивна робота на практичному занятті

3. Бали за відповідь на колоквіумі (дистанційна форма навчання)

Колоквіум відбувається у формі усної співбесіди викладача із студентом з використанням засобів онлайн зв'язку (Zoom, Google Meet тощо). Викладач задає студенту поступово декілька питань, на які студент відразу повинен надавати свою відповідь. Питання викладача можуть бути як продовженням опитування за попереднім питанням, так і бути на іншу тему. За відповідь на кожне питання студент отримує певну кількість балів. Питання, в залежності від їх складності можуть вартувати від 1 до 5 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на колоквіумі дорівнює **10 балів**.

Під час відповіді на питання колоквіуму максимальну кількість балів студент отримує у випадку, якщо він надав повні та правильні відповіді на всі запитання викладача або припустився незначних похибок, які не вплинули на саму відповідь.

Нуль балів студент отримує у випадку, коли відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки. Якщо відповідь частково правильна, то студент за неї отримує, як правило, кількість балів, вдвічі меншу за максимально можливу за відповідне запитання.

4. Бали за відповідь на екзамені (очна форма навчання)

Екзаменаційний білет складається з 4 питань – 2 теоретичних та 2 практичних.

Відповідь на кожне теоретичне та практичне запитання оцінюється в 15 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на екзамені: $15 \text{ балів} \times 4 \text{ запитання} = \mathbf{60 \text{ балів}}$.

За відповідь на кожне запитання білету студент отримує:

- 12-15 балів, якщо він надав повну та правильну відповідь або припустився незначних похибок, які істотно не вплинули на саму відповідь,
- 8-11 балів, якщо відповідь правильна лише частково або не є повною (наприклад, наведена лише схема необхідного доведення теореми або під час розв'язання прикладу не перевірена можливість застосування відповідного методу),
- 4-7 бали, якщо відповідь частково правильна, але містить значні прогалини (наприклад, відсутнє необхідне доведення теореми чи під час розв'язання прикладу враховані не всі можливі випадки),
- 0-3 бали, якщо відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки.

5. Розрахунок шкали (R) рейтингу у випадку дистанційного навчання

Семестрова складова рейтингової шкали $R_C = 50 \text{ балів}$, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання модульної контрольної роботи, активність на практичних заняттях та відповідь на колоквіумі.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = 60 + 40 * (R_{\max} - R_{\text{доп}}) / (R_C - R_{\text{доп}}) = \mathbf{100 \text{ балів}},$$

тут $R_{\max} = 50$ – максимальний можливий семестровий рейтинг студента,

$R_{\text{доп}} = 25$ – мінімальна кількість балів, необхідна для допуску.

6. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки у випадку дистанційного навчання

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента ($R_{\text{СТ}}$) не менше 50 % від R_C , тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента R_D визначається за формулою

$$R_D = 60 + 40 * (R_{\text{СТ}} - R_{\text{доп}}) / (R_C - R_{\text{доп}}) = 20 + 1,6 * R_{\text{СТ}}.$$

7. Розрахунок шкали (R) рейтингу у випадку очного навчання

Семестрова складова рейтингової шкали $R_C = 40$ балів, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання модульної контрольної роботи та активність на практичних заняттях.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = R_C + R_E = 100 \text{ балів,}$$

тут $R_E = 60$ – максимальна можлива кількість балів, отримана на екзамені.

8. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки у випадку очного навчання

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента (R_{CT}) не менше 63 % від R_C , тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента R_D визначається за формулою

$$R_D = R_{CT} + R_{STE}. \quad (R_{STE} - \text{бали, набрані студентом на екзамені})$$

Оцінка виставляється відповідно до значення R_D :

Сумарний рейтинг R_D	Оцінка
95-100	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
$25 \leq R_D \leq 59$	Незадовільно
$R_{CT} < 25$	Не допущений

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Перелік теоретичних питань, що виносяться на іспит:

1. Самоспряжений вигляд лінійного диференціального оператора другого порядку. Зведення ЛНДР до самоспряженого вигляду. Формула Гріна. Поняття про крайову задачу. Різні типи крайових умов.
2. Функція Гріна, її побудова. Розв'язування крайової задачі з використанням функції Гріна.
3. Задача Штурма-Ліувілля. Деякі властивості власних чисел та власних функцій. Теорема Стеклова.
4. Поняття про системи диференціальних рівнянь. Нормальні системи. Лінійні однорідні і неоднорідні системи (ЛОС і ЛНС).
5. ЛОС зі сталими коефіцієнтами Побудова ФСР ЛОС у випадку простих власних значень.
6. ЛОС зі сталими коефіцієнтами. Побудова ФСР ЛОС у випадку кратних власних значень.
7. Експонента матриці. Поняття про банахову алгебру. Означення $\exp(x)$, де x це елемент банахової алгебри. Множина квадратних матриць розміру n - приклад банахової алгебри. Означення $\exp(A)$, де A - квадратна матриця. Властивості $\exp(A)$.
8. Обчислення $\exp(A)$.
9. Розв'язування ЛОС за допомогою $\exp(A)$.
10. Метод варіації довільних сталих розв'язування лінійних неоднорідних систем (ЛНС).
11. Поняття автономної системи. Фазова крива, фазовий портрет. Положення рівноваги.
12. Поведінка розв'язків лінійної системи біля положення рівноваги (випадки різних дійсних власних чисел). Відповідні фазові портрети (стійкий і нестійкий вузол, седло).

13. Дикритичний вузол, вироджений вузол, фокус, центр. Біфуркаційна діаграма.
14. Елементи теорії стійкості. Означення стійкості за Ляпуновим. Означення асимптотичної стійкості. Геометрична інтерпретація стійкості та асимптотичної стійкості.
15. Стійкість лінійних систем. Еквівалентність стійкості будь-якого розв'язку лінійної однорідної системи і стійкості її нульового розв'язку.
16. Умови стійкості (асимптотичної стійкості) ЛОС.
17. Умови стійкості (асимптотичної стійкості) ЛОС зі сталими коефіцієнтами.
18. Критерій Рауса-Гурвіца. Приклади застосування.
19. Лінеаризація автономної системи. Стійкість за першим наближенням.
20. Функції Ляпунова. Означення додатно(від'ємно)визначеної функції. Означення похідної в силу системи (повної похідної функції за часом). Означення функції Ляпунова. Приклади.
21. Теорема Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість.
22. Умови нестійкості. Теорема Четаєва.
23. Перший інтеграл нормальної системи диф. рівнянь. Системи диф. рівнянь у симетричній формі.
24. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку (ДРЧП першого порядку). Простіші ДРЧП.
25. Квазілінійні ДРЧП першого порядку (зведення до симетричної системи диф. рівнянь).

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено проф, д.ф.-м.н., проф. Лось Валерій Миколайович.

Ухвалено кафедрою прикладної математики (протокол № 14 від 14.05.2025)

Погоджено Методичною комісією факультету (протокол № 11 від 23.05.2025)