Теорія ймовірностей:
Лекція 3
Імовірність як міра

Данило Тавров

8 вересня 2025 р.

Що було на попередній лекції

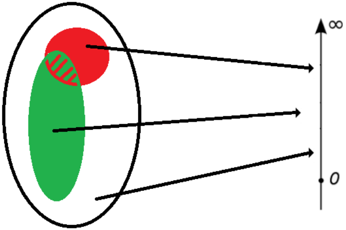
- На попередній лекції ми заклали фундамент для строгої побудови ймовірности
- Ми визначили поняття елементарної події, події та простору елементарних подій
- На просторі елементарних подій ми з вами визначили σ-алгебру — клас множин, замкнений відносно зліченного числа доповнень, об'єднань і перетинів
- Для кожної множини з σ-алгебри можна коректно задати ймовірність
- На **скінченному** або **зліченному** просторі Ω як σ-алгебру можна брати **множину всіх підмножин** — 2^Ω, тобто матимемо вимірний простір $(\Omega, 2^\Omega)$
- На **незліченному** просторі $\mathbb{R}$ як σ-алгебру беруть **Борелеву σ-алгебру** $\mathcal{B}$, тобто матимемо вимірний простір $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

План лекції

План лекції

Визначення (КЛ2.1.1)

Функція від множини (set function) — це функція $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, де $\mathcal{C} = \{A : A \subseteq \Omega\}$ □



- Будь-яка функція $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — це також функція від множини: $g(x) \equiv g(\{x\})$
- Ми **не розрізнятимемо** ці види функцій, а просто казатимемо — «функція»

Визначення (КЛ2.1.2)

Функція $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — **міра** (measure), якщо:

(i) $\mu(A) \geq 0$ для всіх $A \in \mathcal{A}$

(ii) μ є **σ-адитивною** (σ-additive)

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\ , \quad A_j \in \mathcal{A}\ ,\ j = 1, 2, \dots\ , \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j \tag{КЛ2.1.1}$$

□

Скінченність міри

- Мірою простору $\mu(\Omega)$ може бути будь-яке число і навіть ∞
- Якщо $\mu(\Omega) < \infty$, то міра **скінченна**

Визначення (КЛ2.1.3)

Міра μ є σ-**скінченною** (σ-finite), якщо:

- $\mu(\Omega) = \infty$
- Існує розбиття $\{A_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots\}$ простору Ω таке, що $\mu(A_i) < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$

□

Приклад (КЛ2.1.4)

- **Лічна міра** (counting measure) на $(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\#(A) = \begin{cases} n\ , & A = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \\ \infty\ , & \text{інакше} \end{cases} \tag{КЛ2.1.2}$$

- Тобто це потужність для скінченної множини
- Якщо $|\Omega| < \infty$, то $\#(\Omega) < \infty$ — лічна міра **скінченна**
- Якщо $|\Omega| = \aleph_0$, то лічна міра **нескінченна**, але σ**-скінченна**:

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots\ , \qquad \#(\{\omega_i\}) = 1\ ,\ i = 1, 2, \dots$$

- Якщо $|\Omega| = \mathfrak{c}$, то лічна міра вже не буде навіть σ-скінченною

□

Визначення (КЛ2.1.5)

Міру $\mathbb{P}$, яка задовольняє всі аксіоматичні властивості з Визначення КЛ2.1.2, і до того ж $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, називають **імовірнісною мірою** (probability measure) □

Визначення (КЛ2.1.6)

- Трійку $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ називають **мірним простором** (measure space)
- Зокрема, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ називають **імовірнісним простором** (probability space)

□

Чому такі аксіоми?

- Розглянуті аксіоми — **мінімальний** набір вимог до будь-якої міри:
  - Мірою множини не може бути від'ємне число (хіба може бути від'ємна, скажімо, площа?!)
  - Міри неперетинних множин додаються (навіть у **нескінченному** випадку)
- Вони відповідають **інтуїтивним уявленням** про (в тому числі класичну) ймовірність
- Аксіома (i):
  - Тому що $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$
  - Звідси $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  - Можна взяти іншу нормалізацію: у побуті часто кладуть $\mathbb{P}(\Omega) = 100$ («імовірність 50%»)
- Аксіома (ii):
  - Дві події незалежні з частотами $\frac{m_1}{n}$ і $\frac{m_2}{n}$
  - Імовірність настання **принаймні однієї** з них є $\frac{m_1 + m_2}{n}$

План лекції

1. Аксіоматичне визначення міри
2. Властивості міри
3. Імовірнісна міра на зліченному просторі елементарних подій

Основні властивості міри

Теорема (КЛ2.2.1)

(Будь-яка) міра μ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ має такі властивості:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Міра є **скінченно-адитивною** (адитивною, finitely additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\ , \quad A_j \in \mathcal{A}\ ,\ j = 1, 2, \ldots\ , \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j \tag{КЛ2.2.1}$$

(iii) μ є монотонно неспадною (monotonically nondecreasing):

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2)\ , \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A}\ ,\ A_1 \subseteq A_2$$

- Як наслідок, якщо $A_1 \subseteq A_2$, то $\mu(A_2 \backslash A_1) = \mu(A_2 \cap A_1^c) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$

(iv) μ є **σ-субадитивною** (σ-subadditive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\ , \quad A_j \in \mathcal{A}\ ,\ j = 1, 2, \ldots \tag{КЛ2.2.2}$$

тобто навіть для **перетинних множин**

- Ця нерівність також відома як **нерівність Була** (Boole's inequality)

(v) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Доведення.

(i) Розгляньмо $A \in \mathcal{A}$ таку, що $\mu(A) < \infty$. Очевидно, що

$$A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$$

- За аксіомою (ii) матимемо:

$$\mu(A) = \mu(A) + \mu(\emptyset) + \dots$$

- Звідси

$$\mu(\emptyset) = 0$$

(ii) Нехай $A_i = \emptyset$ для $i > n$. Використовуючи σ-адитивність, маємо

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{n+1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{n+1}^{\infty} 0 = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

(iii) Якщо $A_1 \subseteq A_2$, то A_1 і $A_2 \backslash A_1 = A_2 \cap A_1^c$ — неперетинні множини:

$$\mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \backslash A_1) \geq \mu(A_1) + 0 = \mu(A_1)$$

Звідси

$$\mu(A_2 \backslash A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$$

Доведення.

(iv) Перепишімо зліченне об'єднання:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + (A_2 \backslash A_1) + \ldots + (A_n \backslash A_{n-1} \backslash \ldots \backslash A_1) + \ldots$$

- Усі множини справа **неперетинні**

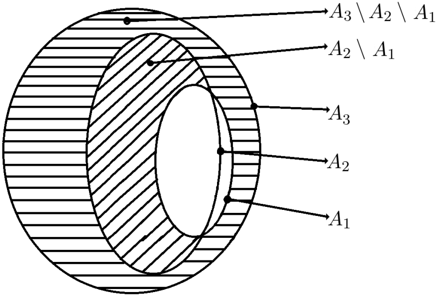


Рис. КЛ2.2.1

Доведення.

Продовження...
Тоді за аксіомою (ii):

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \ldots + \mu(A_n \backslash A_{n-1} \backslash \ldots \backslash A_1) + \ldots$$
$$\leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) + \ldots$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Доведення.

(v)

- Можна розписати як об'єднання двох неперетинних множин:
$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)\ , \qquad A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$$
- Відтак
$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \cap A^c)) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c)$$
- Множину B можна також розписати як об'єднання двох неперетинних множин:
$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)\ , \qquad (B \cap A) \cap (B \cap A^c) = \emptyset$$
- Відтак
$$\mu(B) = \mu((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$$
- Звідси $\mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- Відтак
$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \cap A^c)) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

□

Властивості ймовірнісної міри

Зауваження (КЛ2.2.3)

- Нормалізація $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ дає такі властивості
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$:
  - $\Omega = A \cup A^c$
  - Використовуючи адитивність:
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$
  - Звідси $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$:
  - Імовірність невід'ємна: $\mathbb{P}(A) \geq 0$
  - Звідси $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$

$\square$

Приклад (КЛ2.2.4)

- Нехай подія $A =$«контракт I виконано в рамках дедлайну»
- Нехай подія $B =$«контракт II виконано в рамках дедлайну»
- Нехай **принаймні один** буде виконано в рамках дедлайну з імовірністю $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.9$
- Нехай **обидва** виконано в рамках дедлайну — з імовірністю $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.5$
- Яка ймовірність того, що **тільки один** із контрактів виконано в рамках дедлайну?
- Нас цікавить **симетрична різниця**

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \Delta B) &= \mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.9 - 0.5 = 0.4 \end{aligned}$$

□

Приклад (КЛ2.2.5)

- У мішку містяться талони:

номер i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

- A_i =«витягнуто талон i», $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
- Імовірність A =«номер щонайменше три»:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = \sum_{i=3}^{6} \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

- Розгляньмо B =«витягнуто талон із парним номером»:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

- Витягнуто талон із парним номером **чи** його номер щонайменше 3:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A_4 \cup A_6) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \qquad \square$$

Теорема включення-виключення (Inclusion-exclusion theorem)

Теорема (КЛ2.2.6)

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — деякий імовірнісний простір. Тоді

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \quad \text{(КЛ2.2.3)}$$

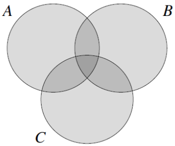


Рис. КЛ2.2.2

- Класна **візуалізація**

Неперервність міри

Визначення (КЛ2.2.7)

- Нехай маємо μ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ і $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$
- Міра μ **неперервна знизу** (continuous from below), якщо

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\lim_{i\to\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

- Міра μ **неперервна зверху** (continuous from above), якщо

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\lim_{i\to\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

- Міра μ **неперервна** (continuous), якщо вона **одночасно** неперервна як зверху, так і знизу
- Міра **неперервна в порожній множині** (continuous at the empty set), якщо $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, $A_i \to \emptyset$, а $\lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i) = 0$

$\square$

Неперервність міри

Теорема (КЛ2.2.8)

(i) Будь-яка міра μ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ є неперервна

(ii) Нехай деяка функція μ:
   - скінченна
   - невід'ємна
   - адитивна
   - неперервна в порожній множині
   - $\mu(\emptyset) = 0$

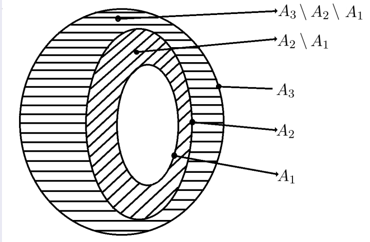
- ...тоді μ є σ-адитивною, тобто є **повноцінною мірою**

Неперервність міри

Доведення.

- Для доведення неперервности спочатку покажімо неперервність **знизу**
- Нехай $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$:

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + (A_2 \backslash A_1) + \ldots + (A_{n+1} \backslash A_n \backslash \ldots \backslash A_1) + \ldots$$
$$= A_1 + (A_2 \backslash A_1) + \ldots + (A_{n+1} \backslash A_n) + \ldots$$
$$\equiv B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots$$



Доведення.

Продовження...

- Оскільки ці множини вже є **неперетинними**:

$$\mu\left(\lim_{i\to\infty} A_i\right) = \mu\left(\lim_{i\to\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_1) + \mu(A_2\setminus A_1) + \ldots + \mu(A_n\setminus A_{n-1})\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\right)$$
$$= \lim_{i\to\infty}\mu(A_i)$$

Неперервність міри

Доведення.

Продовження...

- Покажімо тепер неперервність **зверху**
- Нехай $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$
- Тоді $A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq \dots$ і можемо використати щойно доведений результат:

$$\lim_{i\to\infty} \mu(\Omega\backslash A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i^c) = \mu\left(\lim_{i\to\infty} A_i^c\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)$$
$$= \mu\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) = \mu\left(\Omega\backslash\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(\Omega) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

- Тобто
$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

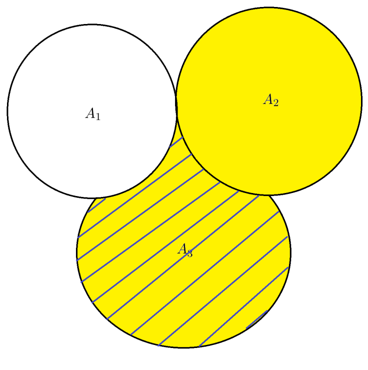
Неперервність міри

Доведення.

Продовження...

- Доведімо тепер другу частину теореми
- Нехай $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, **неперетинні** і $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
- Розгляньмо множини $C_n = \bigcup_{i>n} A_i = A \setminus \left(\bigcup_{i \le n} A_i \right)$
- Вони утворюють **незростаючу** послідовність, а $C_n \to \emptyset$

Тут $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$
C_2 — жовті області
C_3 — заштрихована область



Доведення.

Продовження...

- Ураховуючи неперервність у порожній множині, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(A \backslash \left(\bigcup_{i\le n} A_i\right)\right)$$
$$= \mu(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0$$

- Відтак

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

□

Проміжний підсумок

- Ми формально увели поняття ймовірности як міри — деякої функції від множини
- Ми вимагаємо від міри виконання всього двох властивостей (аксіом):
  - Невід'ємність
  - Міри неперетинних множин можна додавати (навіть якщо множин є **зліченна** кількість)
- Ми показали, що з цих двох властивостей випливає низка інших:
  - (Скінченна) адитивність
  - Монотонна неспадність
  - σ-субадитивність (для будь-яких вимірних множин, у т.ч. перетинних)
  - Неперервність
- Як і у випадку з σ-алгебрами, дуже добре, що аксіом **мало**, а властивостей **багато**
- Для перевірки, що функція є саме мірою, треба перевірити мало аксіом, а решта властивостей — **як бонус**
- Тепер, коли ми знаємо, що таке міра, потрібно нарешті почати розглядати, **як побудувати деяку (ймовірнісну) міру**

План лекції

1. Аксіоматичне визначення міри
2. Властивості міри
3. Імовірнісна міра на зліченному просторі елементарних подій

Імовірність на зліченному просторі

- Нехай $|\Omega| < \infty$ або навіть $|\Omega| = \aleph_0$
- Тоді як σ-алгебру можна взяти **множину всіх підмножин**: $\mathcal{A} = 2^\Omega$
- Імовірнісну міру для вимірного простору $(\Omega, 2^\Omega)$ можна задати так

Теорема (КЛ2.3.1)

- Нехай $(\Omega, 2^\Omega)$ — деякий зліченний вимірний простір
- Нехай функцію $p : \Omega \to [0; 1]$ визначено так, що:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

- Тоді $\mathbb{P} : 2^\Omega \to [0; 1]$ така, що

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \qquad \text{(КЛ2.3.1)}$$

є ймовірнісною мірою

Доведення.

- Потрібно перевірити три властивості ймовірнісної міри
- Те, що $\mathbb{P}$ невід'ємна — очевидно
- Імовірність усього простору

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$$

за визначенням функції p

- Потрібно довести σ-адитивність

Доведення.

Продовження...

- Розгляньмо

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ , \quad A_i \in 2^{\Omega} \ , \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ , \ i \neq j$$

- Оскільки простір зліченний,

$$A_i = \{\omega_j \ , \ j \in I_i\} \ , \quad I_i \cap I_j = \emptyset \ , \ i \neq j$$

- Тут I_i, I_j — деякі множини *індексів*
- Використовуючи (КЛ2.3.1), маємо:

$$\mathbb{P}\,(A) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \in I_i} p\,(w_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\,(A_i)$$

$\square$

Дискретний імовірнісний простір

Визначення (КЛ2.3.2)

Імовірнісну міру, утворену відповідно до Теореми КЛ2.3.1, називають **дискретною** (discrete), як і сам імовірнісний простір □

- Таких мір можна придумати дуже багато
- Найпростіша дискретна ймовірнісна міра на **скінченному** $(\Omega, 2^{\Omega})$:

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

- Це ніщо інше, як **класична ймовірність**
- Інші варіанти побудови дискретних імовірнісних мір розглядатимемо далі в цьому курсі