Теорія ймовірностей:
Практичне заняття 2
Комбінаторні доведення. Геометричні ймовірності.
Вимірні множини

11.09.2025

План заняття

План заняття

- На цьому занятті продовжуватимемо розбирати практичні приклади, для яких у нас достатньо знань
- Знову використовуватимемо раніше розглянуті поняття:
  - Випадковий експеримент
  - Простір елементарних подій
  - Класичне визначення ймовірности
  - Правило множення
  - Вибір

Табл. Практикум1.2.1.: Способи підрахунку кількостей можливих варіантів для виборів різного типу

	Зі збереженням порядку	Без збереження порядку
Із повтореннями	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Без повторень	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

План заняття

- Як правило, доведення комбінаторних тотожностей роблять:
  - Методом математичної індукції
  - Виконанням алгебричних операцій

Приклад (Практикум2.2.1)

- Доведімо тотожність

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Це тривіально випливає з розкриття біномного коефіцієнту:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

□

Приклад (Практикум2.2.2)

- Доведімо тотожність

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1 \qquad \text{(Практикум2.2.1)}$$

- Це можна здійснити методом математичної індукції:
  - **База індукції**: якщо $n = 2$, то

$$\frac{4!}{2^2\cdot 2!} = 3 = 3\cdot 1$$

  - **Індукційний перехід**: нехай (Практикум2.2.1) виконується для $n-1$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{2^n n!} &= \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!}\cdot\frac{(2n)(2n-1)}{2n} \\ &= (2n-3)\ldots 3\cdot 1\cdot\frac{(2n)(2n-1)}{2n} \\ &= (2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1 \end{aligned}$$

□

- Часто такі тотожності можна довести **комбінаторно**
- Шляхом розгляду різних способів підрахунку варіантів одного експерименту

Приклад (Практикум2.2.1)

- Доведімо тотожність
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- Зліва стоїть число варіантів вибору k членів комітету з-поміж n кандидатів
- Справа стоїть число варіантів вибору $n-k$ **НЕ членів комітету** з-поміж n кандидатів
- Результат, очевидно, один і той самий

$\square$

Приклад (Практикум2.2.2)

- Доведімо тотожність

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1 \qquad \text{(Практикум2.2.1)}$$

- І зліва, і справа стоїть кількість варіантів утворити n пар із $2n$ наявних осіб
- Наприклад, для $n = 3$ можливим розбиттям на пари є $\{\{1,5\},\{2,3\},\{4,6\}\}$
- **Зліва**:
  - Перестановка чисел від 1 до $2n$ визначає розбиття на пари
  - $(\mathbf{1,5,2,3,4,6})$ визначає розбиття $\{\{1,5\},\{2,3\},\{4,6\}\}$
  - Усього — $(2n)!$ перестановок
  - $(\mathbf{1,5,2,3,4,6})$ і $(\mathbf{5,1,3,2,4,6})$ визначають однакове розбиття
  - Поділити на 2^n варіантів **перестановок у рамках кожної окремої пари**
  - $(\mathbf{1,5,2,3,4,6})$ і $(\mathbf{2,3,4,6,1,5})$ визначають однакове розбиття
  - Поділити на $n!$ варіантів **перестановок самих пар**
- **Справа**:
  - Для першої особи існує $2n-1$ напарників
  - Паруємо їх і викидаємо
  - Для чергової особи існує $2n-3$ напарників
  - Паруємо їх і викидаємо
  - І т.д.

Вправа (Практикум2.2.3)

Доведімо тотожність

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}, \qquad k \le n \qquad \text{(Практикум2.2.2)}$$

□

Розв'язання.

- Вибір **команди** в k осіб із-поміж n наявних і призначення її **капітана**
- Перший варіант:
  - n варіантів вибрати **капітана**
  - $\binom{n-1}{k-1}$ варіантів вибрати членів його **команди**
- Другий варіант:
  - $\binom{n}{k}$ варіантів вибрати членів **команди**
  - k варіантів вибрати **капітана**
- Третій варіант:
  - $\binom{n}{k-1}$ варіантів вибрати членів команди, що **НЕ є капітаном**
  - $n-(k-1) = n-k+1$ варіантів вибрати **капітана** з решти осіб
- Далі застосовуємо правило множення

□

Це дуже корисний результат:

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

Тотожність Вандермонда

Вправа (Практикум2.2.4)

Доведімо

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} \qquad \text{(Практикум2.2.3)}$$

□

Розв'язання.

- Розгляньмо експеримент із формування команди на олімпіаду з математики серед студентів двох різних факультетів
- m студентів представляють факультет 1, а n — факультет 2
- **Зліва:** $\binom{m+n}{k}$ варіантів формування команди в k осіб
- **Справа:**
  - Команда з k осіб: j представників факультету 1 і $k-j$ представників факультету 2, $j = 0, 1, \ldots, k$
  - $\binom{m}{j}$ способів вибрати j представників факультету 1
  - $\binom{n}{k-j}$ способів вибрати j представників факультету 2
  - $\binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j}$ варіантів команди з j представниками факультету 1
  - Просумувати за всіма j і дістати загальну кількість

□

План заняття

- Цікавий клас задач можна розв'язувати **методом відбиття** (reflection method)
- Запропонував у 1887 р. Дезіре Андре (Desiré André, 1840–1917) для розв'язання такої задачі

Вправа (Задача Бертрана про вибори (Bertrand's Ballot Problem), Практикум2.3.1)

- У виборах беруть участь кандидати A і B
- Нехай за кандидата A подадуть n голосів, а за B — m голосів, $m < n$ (A переміг)
- Голоси подаватимуть **послідовно і у випадковому порядку**
- Чому дорівнює ймовірність, що кандидат A буде **лідерувати** протягом **усього часу**?

□

- Модель **випадкового блукання** (random walk)
- Частинка починає рух із точки 0
- На кожному кроці зміщується на 1 вправо або вліво з імовірністю 0.5
- Позначмо позицію на кроці n через $S(n)$

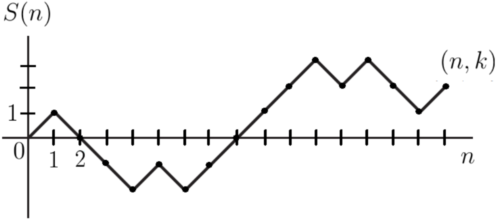


Рис. Практикум2.3.1а

Загальне число траєкторій

- Частинка може рухатися в обидва боки з однаковою ймовірністю
- Тому всі траєкторії є рівноймовірними, а отже застосовна класична ймовірність
- Нехай $N_n(k)$ — число можливих **різних** траєкторій від точки $(0,0)$ до точки (n,k)

Лема (Практикум2.3.2)

- Нехай $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < a'$
- Тоді число траєкторій від (a,b) до (a',b') залежить тільки від $n = a' - a$, $k = b' - b$
- У цьому випадку $N_n(k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$

Доведення.

- Траєкторія від (a, b) до (a', b') передбачає r кроків «угору» та s «униз»
- Загальне число кроків: $n = r + s$
- Кінцева позиція: $S(n) = b + k$, де $k = r - s$
- Звідси

$$r = \frac{n+k}{2}\,, \qquad s = \frac{n-k}{2}$$

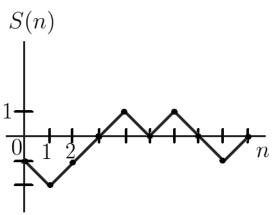


Рис. Практикум2.3.1б

$$(a, b) = (0, -1)\,,\ (a', b') = (9, 0)\,,\ r = 5\,,\ s = 4\,,\ n = 9\,,$$
$$k = 5 - 4 = 1\,,\ S(9) = -1 + 1 = 0$$

Загальне число траєкторій

Доведення.

Продовження...

- Кроки «вгору» і «вниз» можна впорядкувати в будь-який спосіб
- Існує $\binom{n}{r}$ варіантів вибрати r додатних кроків із n можливих
- Нехай $(a, b) = (0, 0)$, тоді $(a', b') = (n, k)$, а відтак

$$N_n(k) = \binom{n}{r} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

$\square$

Твердження (Практикум2.3.3)

- Нехай $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < a'$, $b, b' > 0$
- Тобто траєкторії починаються і закінчуються **вище нуля**
- Тоді число траєкторій від (a, b) до (a', b'), **які перетинають (або торкають) вісь абсцис**, дорівнює числу траєкторій від $(a, -b)$ до (a', b')
- Воно залежить тільки від $n = a' - a$ і $m = b' + b$
- Воно дорівнює $N_n(m) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}}$

Доведення.

- Якщо траєкторія перетинає (або торкає) вісь абсцис, то існує **найменший** $1 \leq j \leq n-1$, коли це стається:

$$S(0) \equiv b > 0, S(1) > 0, \ldots, S(j-1) > 0, S(j) = 0$$

- Уведімо деякі позначення:
  - $A = (a, b)$ — початок
  - $B = (a + j, 0)$ — дотик до оси абсцис
  - $A' = (a', b')$ — кінець
  - $A'' = (a, -b)$ — дзеркальне відображення початку

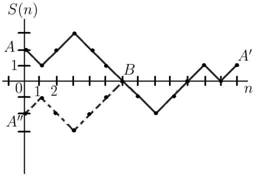


Рис. Практикум2.3.1в

$$A = (0, 2)\ ,\ \ A' = (13, 1), B = (6, 0)\ ,\ \ A'' = (0, -2)$$

Доведення.

Продовження...

- Розгляньмо будь-яку траєкторію, яка перетинає (або торкає) вісь абсцис у $(j, 0)$
- Для неї можна збудувати траєкторію, частина якої до j-го кроку є **дзеркальним відображенням**
- Згідно з Лемою Практикум2.3.2, існує $N_n(b' - (-b)) = N_n(m)$ траєкторій від $(a, -b)$ до (a', b')
- Але тоді буде існувати стільки ж траєкторій від (a, b) до (a', b'), **що перетинають (або торкають) вісь абсцис**

$\square$

Теорема про вибори (The Ballot Theorem)

Теорема (Практикум2.3.4)

Число можливих траєкторій від $(0,0)$ до (n,k), для яких $S(j) > 0$ **для всіх** $j = 1, \ldots, n$, дорівнює

$$N_n^+(k) = \frac{k}{n} N_n(k) \qquad \text{(Практикум2.3.1)}$$

Доведення.

- Траєкторія починається з точки $(0,0)$
- Перший крок був «угору», і тому $S(1) = 1$ (інакше не буде додатна)
- Згідно з Лемою Практикум2.3.2, усього таких траєкторій є $N_{n-1}(k-1)$ $(b' = k,\ b = 1)$
- Із них **перетинають (або торкають) вісь абсцис** $N_{n-1}(k+1)$ штук (Твердження Практикум2.3.3, $b' = k,\ b = 1$)
- Звідси *не перетинають (і не торкають) осі абсцис* стільки траєкторій:

$$N_n^+(k) = N_{n-1}(k-1) - N_{n-1}(k+1) = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2} - 1} - \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}}$$

Доведення.

Продовження...

- Згідно з (Практикум2.2.2),

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

- Отже

$$\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1} = \frac{n+k}{2n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

$$\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}} = \frac{(n-1)-\frac{n+k}{2}+1}{\frac{n+k}{2}}\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1} = \frac{(n-1)-\frac{n+k}{2}+1}{\frac{n+k}{2}}\cdot\frac{n+k}{2n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$$

- Отже

$$N_n^+(k) = \left(\frac{n+k}{2n} - 2\frac{n-\frac{n+k}{2}}{n+k}\cdot\frac{n+k}{2n}\right)\binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}} \qquad \square$$

Вправа (Задача Бертрана про вибори (Bertrand's Ballot Problem), Практикум2.3.1)

- У виборах беруть участь кандидати A і B
- Нехай за A подадуть n голосів, а за B — m голосів, $m < n$ (A переміг)
- Голоси подаватимуть **послідовно і у випадковому порядку**
- Яка ймовірність, що кандидат A буде **лідерувати** протягом **усього часу**?

$\square$

Розв'язання.

- Випадкове блукання:
  - k — поточна кількість поданих голосів
  - $S(k)$ — різниця в голосах на k-ому кроці
- Наприклад: після 7 голосів A має 5, а B має 2: $S(7) = 5 - 2 = 3$
- **Додатних** траєкторій існує $N^{+}_{n+m}(n-m) = \frac{n-m}{n+m} N_{n+m}(n-m)$ штук
- **Усього** існує $N_{n+m}(n-m)$ траєкторій
- Тому

$$\mathbb{P}\left(\text{«кандидат } A \text{ постійно лідерує»}\right) = \frac{n-m}{n+m} \cdot \frac{N_{n+m}(n-m)}{N_{n+m}(n-m)} = \frac{n-m}{n+m} \qquad \square$$

Вправа (Практикум2.3.5)

- У маршрутне таксі по черзі у **випадковому порядку** сідають 100 пасажирів
- У 75 з них є монети по 5 грн, у 25 — по 10 грн
- Проїзд коштує 5 грн
- На початку маршруту у водія немає вільних коштів
- Нехай подія A =«у водія завжди буде принаймні 5 грн для решти»
- Нехай подія B =«у водія завжди знаходитиметься решта»
- Чому дорівнюють $\mathbb{P}(A)$ і $\mathbb{P}(B)$?

□

Розв'язання.

- Випадкове блукання:
  - k — поточний пасажир
  - $S(k)$ — поточна кількість монет по 5 грн
    - У пасажира 5 грн: $S(k) = S(k-1) + 1$
    - У пасажира 10 грн: $S(k) = S(k-1) - 1$
- Кінцева точка частинки дорівнює $(100, 75 - 25) = (100, 50)$
- Згідно з Лемою Практикум2.3.2,

$$|\Omega| = N_{100}(50) = \binom{100}{\frac{100+50}{2}} = \binom{100}{75}$$

Розв'язання.

Продовження...

- Розгляньмо подію A =«у водія завжди буде принаймні 5 грн для решти»
- По суті, це траєкторії, для яких $S(k) \geq 1$, $k = 1, \ldots, 100$
- Тобто траєкторії, які **ніколи не перетинають оси абсцис**
- Згідно з Теоремою Практикум2.3.4,

$$|A| = N^{+}_{100}(50) = \frac{50}{100}\binom{100}{75} = \frac{1}{2}\binom{100}{75}$$

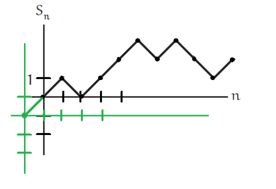
- Отже

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

Розв'язання.

Продовження...

- Розгляньмо подію $B =$«у водія завжди знаходитиметься решта»
- Тобто **траєкторія може торкати вісь абсцис**: $S(1) = 1$, $S(k) \geq 0$, $k = 2, \ldots, 100$
- Для використання попереднього результату потрібно **зсунути систему координат**:



- Тоді рух буде від $(0, 0)$ до $(101, 51)$, але вже **без перетину оси абсцис**

Розв'язання.

Продовження...

- Число таких траєкторій, згідно з Теоремою Практикум2.3.4, дорівнює, використовуючи (Практикум2.2.2),

$$|B| = N_{101}^{+}(51) = \frac{51}{101}\binom{101}{\frac{101+51}{2}} = \frac{51}{101}\binom{101}{76} = \frac{51}{101}\,\frac{101}{76}\binom{100}{75} = \frac{51}{76}\binom{100}{75}$$

- Отже

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{51}{76}\binom{100}{75} \cdot \frac{1}{\binom{100}{75}} \approx 0.671$$

$\square$

План заняття

Визначення

- Класичну ймовірність можна **спробувати** узагальнити на незліченний простір Ω:
$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \qquad \text{(Практикум2.4.1)}$$
- $m(\cdot)$ — міра множини (довжина, площа, об'єм тощо)

Вправа (Задача про голку Бюффона (Buffon's needle problem), Практикум2.4.1)

- Нехай маємо підлогу з паралельних дошок однакової ширини d
- Нехай на підлогу падає голка довжиною $l \leq d$
- Чому дорівнює ймовірність $\mathbb{P}(A)$ того, що голка перетинатиме межу двох дошок?

$\square$

Розв'язання.

- Голка або впаде **в рамках одної дошки**, або **між дошками**

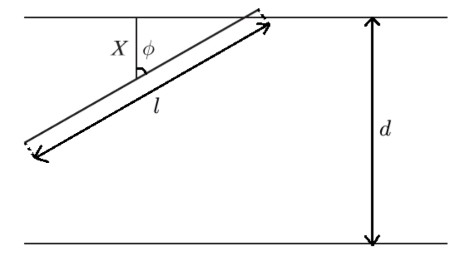


Рис. Практикум2.4.1

- Позицію голки можна описати двома змінними:
  - X: відстань від середини голки до найближчої межі дошок
  - ϕ: кут між голкою та перпендикуляром, опущеним із середини голки на межу між двома дошками

Розв'язання.

Продовження...

- Розгляньмо подію $A =$«гіпотенуза утвореного прямокутного трикутника буде меншою від $l/2$», тобто якщо

$$\frac{X}{\cos\phi} < \frac{l}{2} \Rightarrow X < \frac{l}{2}\cos\phi \qquad \text{(Практикум2.4.2)}$$

- Простір елементарних подій:
  - Результат експерименту — (X, ϕ)
  - Простір

$$\Omega = \left[0; \frac{d}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

  - Отже

$$m(\Omega) = \frac{\pi d}{4}$$

Розв'язання.

Продовження...

- Подія A: точки з квадрату, для яких $X < \frac{l}{2}\cos\phi$

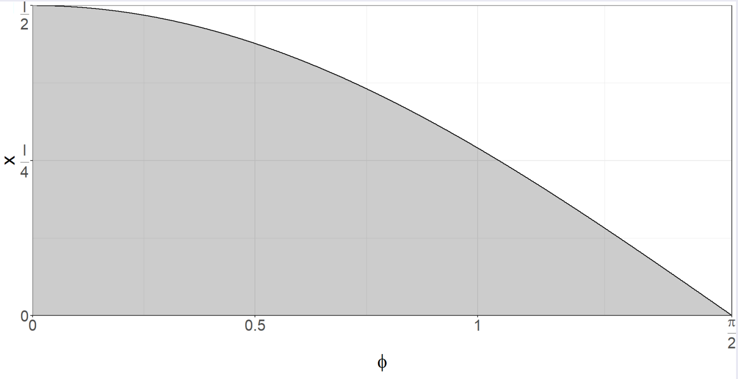


Рис. Практикум2.4.2

Розв'язання.

- Площа A — інтеграл

$$m(A) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos\phi \, d\phi = \frac{l}{2} (\sin\phi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{2}$$

- Отже відповідно до (Практикум2.4.1) маємо:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{l}{2} \cdot \frac{4}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}$$

$\square$

Задача про кошти

Вправа (Практикум2.4.2)

- Чоловік і дружина використовують одну картку на різних вебсайтах
- На картці є 10 000 грн
- Чому дорівнює ймовірність $\mathbb{P}(A)$ того, що в одного з них не пройде оплата через нестачу коштів?

Розв'язання.

- Нехай x — скільки грошей витратив чоловік
- Нехай y — скільки грошей витратила дружина
- Тоді $\Omega = [0; 10\,000] \times [0; 10\,000]$
- Подія $A = \left\{(x, y)^\top \in \Omega : x + y > 10\,000\right\}$
- Тобто це половина відповідного квадрата, що лежить над діагоналлю
- Відтак

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

Вправа (Практикум2.4.3)

- Двоє друзів умовилися зустрітися випити кави
- «Десь» між дванадцятою й першою годиною
- Хто прийде першим, очікуватиме іншого протягом 15 хвилин (1/4 години), але не пізніше першої години дня
- Якщо за цей час ніхто не з'явиться, то зустріч не відбудеться
- Чому дорівнює ймовірність $\mathbb{P}(A)$ того, що зустріч таки відбудеться?

$\square$

Розв'язання.

- Уведімо деякі позначення
- x — «момент часу» приходу першого друга
- y — «момент часу» приходу іншого друга
- Тоді $\Omega = [0;1] \times [0;1]$
- Подія A:

$$x \le y \le x + \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} y - x \le \frac{1}{4} \\ y \ge x \end{cases}$$

або

$$y \le x \le y + \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x - y \le \frac{1}{4} \\ x \ge y \end{cases}$$

Розв'язання.

- **Відстань** між двома моментами прибуття друзів не перевищує 1/4 години

$$A = \left\{ (x, y)^\top \in [0; 1] \times [0; 1] : |x - y| \le \frac{1}{4} \right\}$$

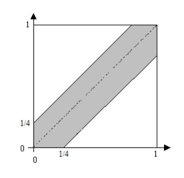


Рис. Практикум2.4.3

- Згідно з (Практикум2.4.1), $\mathbb{P}\left(A\right) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} = \dfrac{m(A)}{1} = m(A)$
- Вирізаємо з квадрата 2 трикутники:

$$\mathbb{P}\left(A\right) = m(A) = 1 - 2m(\Delta) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \qquad \square$$

План заняття

Визначення (КЛ1.5.1)

Клас $\mathcal{F}$ підмножин деякого простору Ω є **алгеброю** (algebra), якщо:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) з $A \in \mathcal{F}$ випливає $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) з $A, B \in \mathcal{F}$ випливає $A \cup B \in \mathcal{F}$

$\square$

Твердження (КЛ1.5.2)

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}$ замкнена відносно **скінченного** числа об'єднань:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$$

(iii) $\mathcal{F}$ замкнена відносно **скінченного** числа **перетинів**:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$$

Алгебра $\mathcal{B}_0$

Твердження (КЛ1.5.4)

- Нехай $\Omega = \mathbb{R}$
- Розгляньмо клас $\mathcal{I}$, який містить:
  - $\emptyset$
  - Пів інтервали $(a_1; a_2]$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$ (**відкриті зліва і замкнені справа**)
  - Промені $(-\infty; a]$, $(b; \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$
- Тоді клас $\mathcal{B}_0$ **скінченних об'єднань множин** із $\mathcal{I}$ є **алгеброю**

Визначення (КЛ1.5.8)

Клас $\mathcal{A}$ підмножин деякого простору Ω є **σ-алгеброю** (σ-algebra), якщо:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. з $A \in \mathcal{A}$ випливає $A^c \in \mathcal{A}$
3. з $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ випливає $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ **(зліченні об'єднання!)**

□

Як і для алгебр, справедливо:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ замкнена відносно **зліченного** числа перетинів (закон де Моргана):

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

- Будь-яка σ-алгебра є алгеброю (скінченне об'єднання — частинний випадок зліченного)

Вимірний простір

Визначення (КЛ1.5.9)

- $(\Omega, \mathcal{A})$ — **вимірний простір** (measurable space)
- Множини в σ-алгебрі $\mathcal{A}$ — **вимірні множини** (measurable sets)

$\square$

Визначення (КЛ1.5.12)

- Довільний клас $\mathcal{C}$ **породжує** (generates) **алгебру**, якщо це **найменша** алгебра, яка містить $\mathcal{C}$
- Таку алгебру позначають через $\mathcal{F}(\mathcal{C})$
- Довільний клас $\mathcal{C}$ **породжує** (generates) **σ-алгебру**, якщо це **найменша** σ-алгебра, яка містить $\mathcal{C}$
- Таку алгебру позначають через $\mathcal{A}(\mathcal{C})$

$\square$

Лема (КЛ1.5.13)

Деякий клас $\mathcal{C}$ породжує **єдину** алгебру $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ і **єдину** σ-алгебру $\mathcal{A}(\mathcal{C})$

Лема (КЛ1.5.14)

Нехай $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ — деякі класи множин. Тоді:

1. (i) σ-алгебра породжує саму себе: $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{C})) = \mathcal{A}(\mathcal{C})$
2. (ii) Більший клас породжує більшу σ-алгебру: якщо $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, то $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_2)$
3. (iii) Породжена σ-алгебра містить породжену алгебру: $\mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) = \mathcal{A}(\mathcal{C})$
4. (iv) Якщо $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$, то $\mathcal{A}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$

Борелева σ-алгебра

Визначення (КЛ1.5.15)

σ-алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{O})$, яку породжує клас усіх **відкритих множин** дійсної оси $\mathcal{O}$, має назву **Борелевої σ-алгебри** (Borel σ-algebra), а множини, що їй належать, називають **Борелевими множинами** (Borel sets) $\square$

Твердження (КЛ1.5.16)

1. Усі замкнені множини
2. Усі одноелементні множини $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$
3. Усі зліченні множини є Борелевими
4. Усі інтервали виду $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(-\infty; b)$, $[a; \infty)$

План заняття

Вправа (Практикум2.5.1)

- Нехай $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$
- Нехай $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}\}$
- Яку алгебру $\mathcal{F}$ (вона ж буде σ-алгебра) породжує цей клас множин?

$\square$

Побудова простенької алгебри

Розв'язання.

- За визначенням (σ-)алгебри, вона повинна містити як самі множини, так і їхні доповнення
- Доповненнями $\{1\}$ та $\{2\}$ є $\{2, 3, 4\}$ та $\{1, 3, 4\}$ відповідно
- Також алгебрі повинні належати всі можливі об'єднання цих множин
- У результаті доходимо висновку, що

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$$

$\square$

Вправа (Практикум2.5.2)

Доведіть, що такі множини належать Борелевій σ-алгебрі у двовимірному просторі $\mathcal{B}^2$:

(i) $A = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

(ii) $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

(iii) $C = (0; 1) \times [2; 3)$

$\square$

Які множини є Борелевими

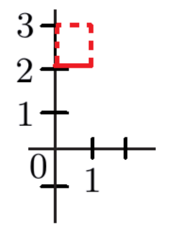
Розв'язання.

(i) Борелева σ-алгебра містить усі замкнені множини, тому $A \in \mathcal{B}^2$

(ii) Борелева σ-алгебра містить усі зліченні множини, тому $B \in \mathcal{B}^2$

(iii) Борелеву σ-алгебру породжують декартові добутки пів інтервалів $(a_1; b_1] \times (a_2; b_2]$

- Права й верхня сторона яких їм належить, а ліва й нижня — ні
- $C = (0;1) \times [2;3)$ належить тільки **нижня сторона**, інші — **не належать**



Які множини є Борелевими

Розв'язання.

Продовження...

- З іншого боку, цей квадрат не є ні замкненою, ні відкритою множиною
- Згадайте, що одноелементну множину $\{x\}$ в $\mathbb{R}$ можна подати як зліченний перетин

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n};x\right]$$

- В $\mathbb{R}^2$ можемо розглянути зліченний перетин, наприклад,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n};1\right]\times(2;3]$$

- Його результатом є інтервал $\{(x,y):x=1\ ,\ 2<y\leq 3\}$
- Борелевими в $\mathbb{R}$ є також відкриті інтервали та інтервали, замкнені зліва і відкриті справа
- Тому у схожий спосіб можна утворити інтервал $\{(x,y):0<x<1\ ,\ y=2\}$
- Остаточно шуканий прямокутник можна подати як об'єднання такого інтервалу та відкритої множини $(0;1)\times(2;3)$