Теорія ймовірностей:
Лекція 4
Міри на незлічених просторах. Міра Лебега

Данило Тавров

12 вересня 2025 р.

Що було на попередній лекції

- Ми формально увели поняття ймовірности як міри — деякої функції від множини
- Ми вимагаємо від міри виконання всього двох властивостей (аксіом):
  - Невід'ємність
  - Міри неперетинних множин можна додавати (навіть якщо множин є **зліченна** кількість)
- Ми показали, що з цих двох властивостей випливає низка інших:
  - (Скінченна) адитивність
  - Монотонна неспадність
  - σ-субадитивність (для будь-яких вимірних множин, у т.ч. перетинних)
  - Неперервність
- Як і у випадку з σ-алгебрами, дуже добре, що аксіом **мало**, а властивостей **багато**
- Для перевірки, що функція є саме мірою, треба перевірити мало аксіом, а решта властивостей — **як бонус**
- Також ми розглянули, як (дуже просто) побудувати ймовірнісну міру на зліченному просторі

План лекції

План лекції

Як задати міру на незліченному просторі

- Зі зліченним простором усе зрозуміло
- Як бути в просторі незліченному?

Теорема (Теорема Каратеодорі (Carathéodory Theorem), КЛ2.4.1)

- Нехай на деякій **алгебрі** $\mathcal{F}$ задано міру μ
- Міру можна **подовжити** на породжену σ**-алгебру** $\mathcal{A}(\mathcal{F})$
- Якщо міра **скінченна** (або σ-скінченна), то таке подовження **єдине** і **скінченне** (σ-скінченне)

- Цей результат ми доводити не будемо (це теорія міри)
- Але без нього не обійтися в питанні побудови міри

Що каже Теорема Каратеодорі

- Нехай є міра $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$
- Нехай існує якась інша міра $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}^+$
- Нехай ця друга міра є **подовженням** (extension):

$$\mu(A) = \nu(A) \ , \quad A \in \mathcal{F}$$

- Тоді це подовження **єдине** в тому сенсі, що якщо існує якась інша ν' така, що

$$\nu'(A) = \mu(A) \ , \quad A \in \mathcal{F}$$

- ... то

$$\nu'(A) = \nu(A) \ , \quad A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$$

Застосування Теореми Каратеодорі

- За допомогою цієї теореми можна збудувати міри в такий спосіб
- Спочатку треба задати деяку функцію $\mathbb{P}$ на множинах деякого **малого класу** $\mathcal{C}$
- Далі перевірити, що функція $\mathbb{P}$ є **мірою**, тобто що вона є невід'ємною та σ-адитивною, **на алгебрі** $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, **породженій** класом $\mathcal{C}$
- Нарешті використати Теорему Каратеодорі для **подовження** відповідної міри на **σ-алгебру** $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, **породжену** класом $\mathcal{C}$
    - (за Лемою КЛ1.5.14, $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C}))$)
- Отже, **алгебра** потрібна для того, щоб **спростити** перевірку властивостей міри (скінченні об'єднання простіше, ніж зліченні)

Приклад (Практикум 3.4.3)

- Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
- Нехай $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$
- Можна бачити, що це **не алгебра**:

$$\{\omega_1, \omega_2\} \cup \{\omega_1, \omega_3\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \notin \mathcal{C}$$

- Розгляньмо таку міру μ:

$$\begin{aligned} \mu(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mu(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mu(\{\omega_2, \omega_4\}) = \mu(\{\omega_3, \omega_4\}) = 3 \\ \mu(\Omega) = 6 \\ \mu(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

- Це **справді** міра:
  - Вона невід'ємна
  - Виконується σ-адитивність:

$$\mu(\Omega) = \mu(\{\omega_1, \omega_2\}) + \mu(\{\omega_3, \omega_4\}) = 3 + 3 = 6$$
$$\mu(\Omega) = \mu(\{\omega_1, \omega_3\}) + \mu(\{\omega_2, \omega_4\}) = 3 + 3 = 6$$

□

Умови Теореми Каратеодорі–1

Приклад (Практикум 3.4.3)

Продовження...

- Розгляньмо **подовження** міри μ на σ-алгебру 2^{Ω}:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
μ_1	1	2	2	1
μ_2	2	1	1	2

- Це **справді** подовження:

$$\mu_1(\emptyset) = \mu_2(\emptyset) = 0\ , \quad \mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) = 6$$
$$\mu_1(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mu_2(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3$$
$$\mu_1(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mu_2(\{\omega_1, \omega_3\}) = 3$$
$$\mu_1(\{\omega_2, \omega_4\}) = \mu_2(\{\omega_2, \omega_4\}) = 3$$
$$\mu_1(\{\omega_3, \omega_4\}) = \mu_2(\{\omega_3, \omega_4\}) = 3$$

- Але міри зовсім різні
- Якщо клас $\mathcal{C}$ не є алгеброю, подовження міри на ньому **необов'язково** буде єдиним

$\square$

Умови Теореми Каратеодорі–2

- Розгляньмо ще один контрприклад
- Нехай $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$
- Нехай маємо простеньку алгебру $\mathcal{C} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$
- Нехай μ — лічна міра на $\mathcal{C}$
- Ця міра вочевидь не є σ-скінченною, бо єдине розбиття, яке ми маємо (A і A^c) містить множини, для яких міра нескінченна
- Нехай тепер

$$\mu_1(B) = \{\text{кількість елементів у } B\}\ , \quad \mu_2(B) = 2\mu_1(B)$$

- Нескладно перевірити, що обидві ці міри є подовженням μ на Ω
- Але вони вочевидь є *різні*, тобто подовження є не єдиним саме тому, що μ не є σ-скінченною

Побудова міри Лебега на $(0;1]$

- Побудуймо ймовірнісну міру μ на вимірному просторі $((0;1];\mathcal{B}(0;1])$
- Тут $\mathcal{B}(0;1]$ — Борелева σ-алгебра на пів інтервалі $(0;1]$
- Нехай $\mathcal{I}(0;1]$ — клас із $\emptyset$ та пів інтервалів $(a_1;a_2]$, $a_1,a_2 \in (0;1]$
    - Променів тут не буде з очевидних причин
- Нехай $\mu((a;b]) = b - a$ — **довжина пів інтервалу**
- Це строго формальне узагальнення поняття класичної ймовірности як відносної частоти настання події (оскільки $\mu((0;1]) = 1$)
- Потрібно перевірити, що це буде міра на алгебрі $\mathcal{B}_0(0;1] = \mathcal{F}(\mathcal{I}(0;1])$ — алгебрі скінченних доповнень та об'єднань пів інтервалів із $(0;1]$

Побудова міри Лебега на $(0;1]$

Теорема (КЛ2.4.2)

Нехай маємо пару $((0;1],\mathcal{B}_0(0;1])$. Тоді міра на відповідній алгебрі, яку визначають як

$$\mu((a;b]) = b - a\ ,\ \ \mu(\emptyset) = 0$$

є мірою в розумінні Визначення КЛ2.1.2

Доведення.

- Те, що довжина інтервалу є невід'ємною, є **самоочевидним**
- Щоб показати σ-адитивність міри μ на алгебрі $\mathcal{B}_0(0;1]$, використаймо σ-адитивність **довжин інтервалів**
- Нехай $I_i = (a_i;b_i]$, $i = 1,2,\ldots$, $I_i \cap I_j = \emptyset$, $i \neq j$ — неперетинні пів інтервали з $(0;1]$ (у т.ч. $\emptyset$)
- Тоді

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$$

  - Доведення — в Розд. КЛ2.6 (необов'язково)

Побудова міри Лебега на $(0;1]$

Доведення.

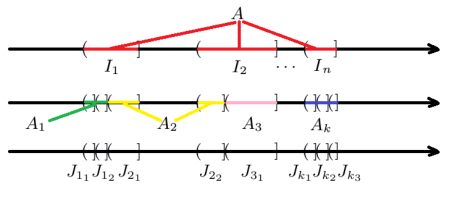
Продовження...

- Нехай

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ , \ \ A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}_0(0;1] \ , \ \ A_i \cap A_j = \emptyset \ , \ \ i \neq j$$

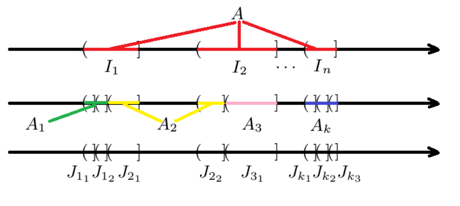
- Оскільки всі ці множини належать алгебрі,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \ , \ \ I_i \cap I_j = \emptyset \ , \ \ i \neq j \qquad A_k = \bigcup_{j=1}^{m_k} J_{k_j} \ , J_{k_i} \cap J_{k_j} = \emptyset \ , \ \ i \neq j$$



Доведення.

Продовження...



- Відповідно

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_i \cap A_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(I_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m_k} J_{k_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k} \mu(I_i \cap J_{k_j}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k} \mu(J_{k_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$\square$

Побудова міри Лебега на $(0;1]$

- Довівши, що $\mu((a;b]) = b - a$ є мірою на алгебрі $\mathcal{B}_0(0;1]$, застосовуємо Теорему Каратеодорі і **подовжуємо** на σ-алгебру $\mathcal{B}(0;1]$
- Результат цього подовження — **міра Лебега** (Lebesgue measure) λ
- Оскільки $\lambda(\Omega) = \lambda((0;1]) = 1$, то міра Лебега на пів інтервалі $(0;1]$ є **ймовірнісною мірою**
- Трійка $((0;1], \mathcal{B}(0;1], \lambda)$ є **ймовірнісним простором**

Зауваження (КЛ2.4.3)

- Ми ніде в доведенні не використали того факту, що $\Omega = (0;1]$
- Тобто міру Лебега можна **аналогічно** увести для деякого **довільного** інтервалу $\Omega = (a;b]$
- Якщо $b - a \neq 1$, то така міра не буде ймовірнісною
- Міру Лебега також можна увести для всієї дійсної оси $\mathbb{R}$
- $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$, але це не проблема, бо λ є σ-скінченною:

$$\mathbb{R} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (-n-1; -n] \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (n; n+1] \right) , \quad \lambda((n;n+1]) = 1$$

- Отже, міра Лебега λ — **єдина σ-скінченна міра, яка має інтерпретацію довжини інтервалу**, тобто така, що $\lambda((a;b]) = b - a$

□

Зауваження (КЛ2.4.4)

- В аналогічний спосіб можна увести міру Лебега в k-вимірному просторі $\mathbb{R}^k$
- Для $B = A_1 \times \ldots \times A_k$, $A_j \in \mathcal{B}_0(0;1]$, $j = 1, \ldots, k$, можна увести міру

$$\mu(B) = \prod_{j=1}^{k} \lambda(A_j)$$

- Якщо $E = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, де B_j неперетинні, то

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$$

- Подовження цієї міри на σ-алгебру $\mathcal{B}^k$ називають **k-вимірною мірою Лебега** і позначають через λ_k

$\square$

Твердження (КЛ2.4.5)

Міра Лебега λ **інваріантна відносно зсуву**: якщо $A \in \mathcal{B}^k$, то

$$A + x \equiv \{a + x : a \in A\} \in \mathcal{B}^k$$

а

$$\lambda_k(A) = \lambda_k(A + x) , \qquad \forall x \in \mathbb{R}^k$$

План лекції

Множини міри нуль

Визначення (КЛ2.5.1)

- Множину A, міра Лебега якої $\lambda(A) = 0$, називають **множиною міри нуль за Лебегом** (Lebesgue measure zero set, null set)
- Подію A, імовірнісна міра якої $\mathbb{P}(A) = 0$, називають **нульовою подією** (null event)

$\square$

Твердження (КЛ2.5.2)

Множинами міри нуль за Лебегом є множини A такі, що

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\ , \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < \varepsilon$$

де I_k — деякі пів інтервали з $\mathcal{I}(0;1]$

Доведення.

- Монотонність і σ-субадитивність:

$$\lambda(A) < \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < \varepsilon$$

- Оскільки ε є абсолютно довільний, $\lambda(A) = 0$

□

Які множини мають міру нуль

Зауваження (КЛ2.5.3)

- Це твердження можна використати для швидкого доведення таких фактів
- Будь-яка **одноелементна множина** $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, має міру нуль:
  - Нехай $x \in (0; 1]$
  - Для будь-якого $\varepsilon > 0$, $x \in (x - \varepsilon; x]$
  - За властивістю монотонности міри, $0 \leq \lambda(\{x\}) \leq \lambda((x - \varepsilon; x]) = \varepsilon$
  - Оскільки ε є довільним, $\lambda(\{x\}) = 0$
- Будь-яка **зліченна множина** має міру нуль:
  - Є зліченним об'єднанням одноелементних множин
  - За властивістю σ-адитивности міра буде рядом із нулів
- **Межа інтервалу** погоди не робить:

$$\lambda((a; b)) = \lambda([a; b]) = \lambda((a; b]) = \lambda([a; b))$$

□

Приклад (КЛ2.5.4)

- Щоб не склалося хибного враження, розгляньмо приклад **незліченної множини**, яка має **міру нуль**
- Виріжмо з $[0; 1]$ середню третину — інтервал $(1/3; 2/3)$
- У кожному закритому інтервалі — $[0; 1/3]$ та $[2/3; 1]$ — також виріжмо по середній третині (інтервали $(1/9; 2/9)$ та $(7/9; 8/9)$)

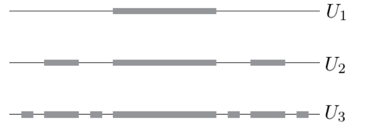


Рис. КЛ2.5.1

- Після кожного кроку i буде вирізано $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{i-1} = 2^i - 1$ інтервалів
- Позначмо ці вирізані інтервали через $J_{i,j}$, $j = 1, \ldots, 2^i - 1$
- Позначмо $U_i = \cup_{j=1}^{2^i-1} J_{i,j}$
- Понад те, $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ і нехай $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$

Приклад (КЛ2.5.4)

Продовження...

- Множина U є відкритою (зліченне об'єднання (неперетинних) відкритих інтервалів)
- Міру порахуємо з неперервности:

$$\lambda(U) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = \lambda\left(\lim_{i\to\infty} U_i\right) = \lim_{i\to\infty} \lambda(U_i) =$$
$$= \lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{2^{i-1}}{3^i}\right)$$
$$= \lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1-(2/3)^i}{1-2/3}\right) = 1$$

- **Множиною Кантора** називають множину $C = [0;1]\backslash U$
- Очевидно, $\lambda(C) = \lambda(U^c) = 1 - \lambda(U) = 0$
- Проте множина Кантора **незліченна!**

□

Приклад (КЛ2.5.4)

Продовження...

- Множина C містить $x \in [0;1]$ такі, що

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \ , \quad x_i \in \{0, 2\}$$

- Наприклад, $\frac{1}{3} \to 0.0222\ldots$, $\frac{2}{3} \to 0.2222\ldots$, $\frac{1}{9} \to 0.0022\ldots$ і т.д.
- Можна зробити заміну $z_i = \frac{x_i}{2}$, $z_i \in \{0, 1\}$
- Отже, маємо набір **двійкових послідовностей**
- Раніше ми згадували, що множина відповідних двійкових розвинень має таку саму потужність, як і весь інтервал $[0;1]$

$\square$

Майже скрізь і майже напевно

Визначення (КЛ2.5.5)

- Твердження S істинне **майже скрізь** (almost everywhere, a.e.), якщо

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega \mid S(\omega) \text{ хибне}\}\right) = 0$$

- Твердження істинне **майже напевно** (almost surely, a.s.) або **з імовірністю 1** (with probability 1, w.p.1), якщо

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid S(\omega) \text{ хибне}\}\right) = 0$$

$\square$

Підсумок

- На минулій лекції ми розглянули формальне визначення міри та її властивості
- Ми з'ясували, як можна побудувати довільну міру на **зліченному** просторі
- Сьогодні ми з'ясували, що Теорема Каратеодорі дає змогу побудувати міру на **незліченному** просторі
- Ми побудували **міру Лебега** і з'ясували, що на $(0;1]$ це буде **ймовірнісна** міра, яка відповідає **класичному визначенню** ймовірности
- Далі будемо розглядати різні конкретні міри, які виринають на практиці