Теорія ймовірностей:
Лекція 2
Вимірні простори

Данило Тавров

5 вересня 2025 р.

Що було на попередній лекції

- На попередній лекції ми заклали фундамент для строгої побудови ймовірности
- Ми визначили поняття елементарної події, події та простору елементарних подій
- Ми розглянули класичне визначення ймовірности, яке працює тільки для скінченних просторів
- На простих прикладах ми побачили, що для зліченних просторів узагальнення ще більш-менш можливе
- Але на незліченні простори узагальнити таке визначення стає проблематично

- Перше, що треба з'ясувати: **які події нас цікавлять**?
- **Для яких подій** будемо визначати ймовірність?
- Позначмо через $\mathcal{C}$ деякий клас (сім'я) подій, які нас цікавлять
- Які події повинні йому належати?

Починаємо формалізувати поняття ймовірности

- Оскільки **події** — це **множини**, до них можна застосовувати доповнення, об'єднання та перетини
- Клас $\mathcal{C}$ повинен містити **результати застосування таких операцій**
- Клас $\mathcal{C}$ повинен бути **замкненим** (closed) відносно таких операцій
- Якщо $A, B \in \mathcal{C}$, то **хотілося б**, щоб $A^c, B^c \in \mathcal{C}$, $A \cup B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$
  - Не може такого бути, щоб $A, B \in \mathcal{C}$, а $A \cup B \notin \mathcal{C}$
- Закони де Моргана дають змогу подати перетин через комбінації доповнення та об'єднання
- Тому достатньо зосередити увагу на останніх двох операціях

План лекції

1. Алгебри
2. σ-Алгебри
3. Борелева σ-алгебра

План лекції

1. Алгебри
2. σ-Алгебри
3. Борелева σ-алгебра

Визначення (КЛ1.5.1)

Клас $\mathcal{F}$ підмножин деякого простору Ω є **алгеброю** (algebra), якщо:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) з $A \in \mathcal{F}$ випливає $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) з $A, B \in \mathcal{F}$ випливає $A \cup B \in \mathcal{F}$

$\square$

- Також такий клас називають **полем** (field)

Твердження (КЛ1.5.2)

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}$ замкнена відносно **скінченного** числа об'єднань:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$$

(iii) $\mathcal{F}$ замкнена відносно **скінченного** числа **перетинів**:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$$

Доведення.

(i) Властивість $\emptyset \in \mathcal{F}$ випливає з $\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) Доведімо замкненість відносно **скінченного** числа об'єднань за **методом математичної індукції**:

- База індукції: $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ за визначенням
- Нехай виконується для $n-1$ множин, і нехай $B \equiv A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \in \mathcal{F}$
- Тоді
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n = B \cup A_n$$
- Маємо дві множини і застосовуємо визначення: $B, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow B \cup A_n \in \mathcal{F}$

(iii) Доведімо замкненість відносно **скінченного** числа **перетинів**:

- За визначенням, доповнення належить алгебрі:
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c \in \mathcal{F}$$
- За законом де Моргана:
$$A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c \in \mathcal{F}$$
- Доповнення належить алгебрі:
$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c \in \mathcal{F}$$
- Отже:
$$A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c \in \mathcal{F}$$ □

Приклад (КЛ1.5.3)

- Тривіальна алгебра: $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
- Повна алгебра: множина $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ всіх підмножин Ω
- Алгебра на основі деякої множини $A \subset \Omega$: $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$
- Алгебра на основі двох неперетинних множин $A, B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset$:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, A \cup B, (A \cup B)^c, \Omega\}$$

- Алгебра на основі скінченного розбиття: множина **скінченних** об'єднань множин зі **скінченного** розбиття деякого простору

$\square$

Розгляньмо приклад алгебри на дійсній вісі $\mathbb{R}$, яка нам знадобиться далі

Твердження (КЛ1.5.4)

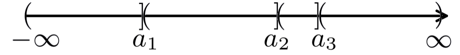
- Нехай $\Omega = \mathbb{R}$
- Розгляньмо клас $\mathcal{I}$, який містить:
  - $\emptyset$
  - Пів інтервали $(a_1; a_2]$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$ (**відкриті зліва і замкнені справа**)
  - Промені $(-\infty; a]$, $(b; \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$
- Тоді клас $\mathcal{B}_0$ **скінченних об'єднань множин** із $\mathcal{I}$ є **алгеброю**

Алгебра $\mathcal{B}_0$

Доведення.

(i) Чи належить $\Omega = \mathbb{R}$ класу $\mathcal{B}_0$? Так:

$$\Omega = (-\infty; a_1] \cup (a_1; a_2] \cup \ldots \cup (a_n; \infty) \,, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$



□

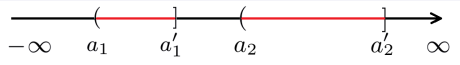
Алгебра $\mathcal{B}_0$

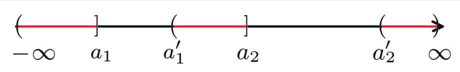
Доведення.

Продовження...

(ii) Якщо $A \in \mathcal{B}_0$, чи $A^c \in \mathcal{B}_0$?

- Нехай
$$A = (a_1; a_1'] \cup \ldots \cup (a_n; a_n'] \,, \quad a_1 \leq \ldots \leq a_n$$
де всі проміжки неперетинні
- Тоді
$$A^c = (-\infty; a_1] \cup \ldots \cup (a_n'; \infty) \in \mathcal{B}_0$$





- Якщо $A = (-\infty; a]$, то $A^c = (a; \infty) \in \mathcal{B}_0$, і навпаки

$\square$

Доведення.

Продовження...

(iii) Доведімо замкненість відносно **перетину**
(далі застосуємо закон де Моргана, просто для перетинів довести простіше)

- Нехай:

$$A = (-\infty; a_1] \cup (a_1; a_1'] \cup \ldots \cup (a_m; a_m'] \cup (a_m'; \infty) \,, \quad a_1 \le \ldots \le a_m$$
$$B = (-\infty; b_1] \cup (b_1; b_1'] \cup \ldots \cup (b_n; b_n'] \cup (b_n'; \infty) \,, \quad b_1 \le \ldots \le b_n$$

  де всі проміжки неперетинні
- Тоді $A \cap B$ буде **об'єднанням попарних перетинів** променів і пів інтервалів з A і B
- Наприклад,

$$(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2)$$

□

Алгебра $\mathcal{B}_0$

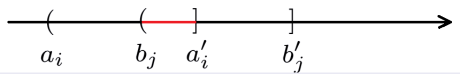
Доведення.

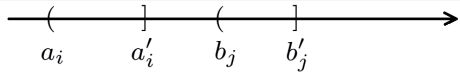
Продовження...

(iii)

- Кожний перетин належить $\mathcal{I}$
- Наприклад:

$$(a_i; a_i'] \cap (b_j; b_j'] = \begin{cases} \emptyset\,, & a_i' < b_j \\ (b_j; a_i']\,, & a_i' \geq b_j \end{cases}$$





- Ще один приклад:

$$(a_i; a_i'] \cap (-\infty; b_j] = \begin{cases} \emptyset\,, & b_j < a_i \\ (-\infty; b_j]\,, & b_j \geq a_i \end{cases}$$

- І т. д. для решти можливих комбінацій
- Відтак $A \cap B$ належить $\mathcal{B}_0$ як скінченне об'єднання пів інтервалів і променів

$\square$

Деякі зауваження

Зауваження (КЛ1.5.5)

- Множини з окремих чисел $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, **не належать** $\mathcal{B}_0$
- Вони є результатом виконання **(нескінченно) зліченних** перетинів

$$\bigcap_n (x - a_n; x]\ , \qquad a_n \to 0$$

(наприклад, $a_n = 1/n$)

□

Зауваження (КЛ1.5.6)

- **Обмежених пів інтервалів** $(a;b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, самих собою **недостатньо** для формування алгебри:
  - $\Omega = \mathbb{R}$ не можна подати як **скінченне** об'єднання пів інтервалів
  - Доповнення не є обмеженим пів інтервалом: $(a;b]^c = (-\infty; a] \cup (b, \infty)$
- Тому обов'язково потрібні **промені**

□

Які об'єднання нам потрібні?

- Якщо залишити тільки **скінченні** об'єднання, то як утворити подію «під час нескінченних підкидань монеток сталася **парна кількість** гербів»?
- Це об'єднання подій «сталося 2 герби», «сталося 4 герби» і т.д. **до нескінченности**
- Тому нам потрібні **зліченні** об'єднання
- Але не все так просто...

Нам потрібні зліченні об'єднання

Приклад (КЛ1.5.7)

- Розгляньмо
$$\left(0;\frac{1}{2}\right], \left(0;\frac{2}{3}\right], \ldots, \left(0;1-\frac{1}{n}\right], \ldots \in \mathcal{B}_0$$
- Кожен попередній інтервал вкладений у наступний (**зростаюча послідовність**), тому
$$\bigcup_{i=1}^{n}\left(0;1-\frac{1}{i}\right] = \left(0;1-\frac{1}{n}\right]$$
- Якщо взяти **зліченне** об'єднання:
$$\bigcup_{n=2}^{\infty}\left(0;1-\frac{1}{n}\right] = (0;1)$$
- **Не замкнений справа**, бо $x=1$ не належить **жодному** з пів інтервалів
- Отже $(0;1)\notin\mathcal{B}_0$
- Алгебра $\mathcal{B}_0$ **не є замкненою відносно зліченного числа об'єднань**

□

План лекції

1 Алгебри

2 σ-Алгебри

3 Борелева σ-алгебра

Визначення (КЛ1.5.8)

Клас $\mathcal{A}$ підмножин деякого простору Ω є **σ-алгеброю** (σ-algebra), якщо:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. з $A \in \mathcal{A}$ випливає $A^c \in \mathcal{A}$
3. з $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ випливає $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ **(зліченні об'єднання!)**

□

Як і для алгебр, справедливо:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ замкнена відносно **зліченного** числа перетинів (закон де Моргана):

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

- Будь-яка σ-алгебра є алгеброю (скінченне об'єднання — частинний випадок зліченного), але не навпаки (як ми щойно пересвідчилися)

Вимірний простір

Визначення (КЛ1.5.9)

- $(\Omega, \mathcal{A})$ — **вимірний простір** (measurable space)
- Множини в σ-алгебрі $\mathcal{A}$ — **вимірні множини** (measurable sets)

$\square$

- Навіщо все це потрібно?
- Хіба не можна просто визначити $\mathcal{A}$ як **множину всіх підмножин** простору Ω? **(таку множину позначають 2^{Ω})**
- Дивлячись для якого простору:
  - Якщо $|\Omega| < \infty$ або $|\Omega| = \aleph_0$, то можна
  - Інакше — **не можна!**

Приклад (КЛ1.5.10)

- Розгляньмо $\Omega = (0;1]$
- Спробуймо на повній σ-алгебрі для цього проміжку визначити таку функцію:
  - $\mathbb{P}([a;b]) = b - a$, $0 \le a \le b \le 1$
  - Якщо події $A_1, A_2, \ldots$ несумісні, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$
  - (Ймовірності несумісних подій додаються для зліченного числа подій)
  - $\mathbb{P}(A \otimes r) = \mathbb{P}(A)$, $0 \le r \le 1$, де

$$A \otimes r \equiv \{a + r \; ; \; a \in A \; , \; a + r \le 1\} \cup \{a + r - 1 \; ; \; a \in A \; , \; a + r > 1\}$$

  - (Ймовірності інваріантні відносно *циклічного зсуву на число r вправо*, адже довжина проміжку у цьому випадку не змінюється)
- Спойлер: це неможливо

$\square$

Приклад (КЛ1.5.10)

Продовження...

- Побудуймо таку множину, для якої ймовірности з такими властивостями запропонувати неможливо
- Цей приклад запропонував італійський математик Джузеппе Віталі (Giuseppe Vitali, 1875–1932)
- Уведімо відношення еквівалентности таке, що $x \sim y$ тоді й тільки тоді, коли $x \otimes r = y$ для деякого $r \in \mathbb{Q} \cap (0; 1]$
- Це відношення утворює розбиття проміжку
- Нехай $H \subset (0; 1]$ містить в точності по одному представнику кожного класу (це можливо за допомогою аксіоми вибору)
- Множини $H \otimes r_1$ і $H \otimes r_2$ для $r_1 \neq r_2$ неперетинні
  - Якщо цим множинам одночасно належить деяка точка $h_1 \otimes r_1 = h_2 \otimes r_2$, то виходить, що $h_1 \sim h_2$
  - Але це неможливо (якщо, звісно, $h_1 \neq h_2$), тому що за побудовою всі точки H належать різним класам еквівалентности
  - Якщо ж $h_1 = h_2$, то тоді $r_1 = r_2$

□

Приклад (КЛ1.5.10)

Продовження...

- Кожна точка $x \in (0;1]$ належить котрійсь із цих множин, а відтак

$$(0;1] = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0;1]} (H \otimes r)$$

- Відповідно, імовірність обох множин повинна бути однакова:

$$\mathbb{P}\left((0;1]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0;1]} (H \otimes r)\right) = \sum_r \mathbb{P}\left(H \otimes r\right)$$

- Оскільки $\mathbb{P}\left(\Omega\right) = 1$, а ймовірність $\mathbb{P}\left(H \otimes r\right) = \mathbb{P}\left(H\right)$ завдяки інваріантності відносно зсуву,

$$1 = \sum_r \mathbb{P}\left(H\right)$$

- Це **неможливо**!
- Адже або $\mathbb{P}\left(H\right) = 0$, і тоді «$1 = 0$», або $\mathbb{P}\left(H\right) = a > 0$, і тоді «$1 = \infty$»
- Отже є підмножини $(0;1]$, для яких неможливо визначити ймовірність із бажаними властивостями □

До чого ми дійшли?

- Ми хочемо визначити ймовірність для **якомога більшого класу** множин
- Цей клас повинен бути **замкнений** відносно доповнень, об'єднань і перетинів
- **Алгебра** замкнена відносно **скінченних** операцій
- Цього **мало**, хочеться **зліченні** операції
- Для цього потрібна σ-**алгебра**
- Але при цьому потрібна така σ-алгебра, яка містить «адекватні» множини, а не які попало
- Для **скінченних і зліченних** просторів Ω можна взяти $(\Omega, 2^{\Omega})$
- Для **незліченних** виникають проблеми
- Хочемо мати **найменшу** σ-алгебру, яка містить «адекватні» множини

Визначення (КЛ1.5.12)

- Довільний клас $\mathcal{C}$ **породжує** (generates) **алгебру**, якщо це **найменша** алгебра, яка містить $\mathcal{C}$
- Таку алгебру позначають через $\mathcal{F}(\mathcal{C})$
- Довільний клас $\mathcal{C}$ **породжує** (generates) σ**-алгебру**, якщо це **найменша** σ-алгебра, яка містить $\mathcal{C}$
- Таку алгебру позначають через $\mathcal{A}(\mathcal{C})$

□

Лема (КЛ1.5.13)

Деякий клас $\mathcal{C}$ породжує **єдину** алгебру $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ і **єдину** σ-алгебру $\mathcal{A}(\mathcal{C})$

Доведення подивіться в Курсі лекцій

- Нам потрібна σ-алгебра, яка містить «адекватні» множини, а не які попало
- σ-алгебра, яку **породжує деякий клас** — **найменша** σ-алгебра, яка містить множини з цього класу
- Отже достатньо вибрати деякий «цікавий» клас і **породити на його основі** σ-алгебру
- Нас задовольнить σ-алгебра, яку породжує **раніше розглянутий клас** $\mathcal{I}$
- А чому б і ні? Вона:
  - Містить усі цікаві множини (пів інтервали і промені)
  - Містить їх зліченні доповнення, об'єднання і перетини
  - Є **найменшою**, тобто не містить «зайвих» множин
- **Що ж це за σ-алгебра?**

Лема (КЛ1.5.14)

Нехай $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ — деякі класи множин. Тоді:

1. σ-алгебра породжує саму себе: $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{C})) = \mathcal{A}(\mathcal{C})$
2. Більший клас породжує більшу σ-алгебру: якщо $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, то $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_2)$
3. Породжена σ-алгебра містить породжену алгебру: $\mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) = \mathcal{A}(\mathcal{C})$
4. Якщо $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$, то $\mathcal{A}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$

Доведення.

(i) Очевидно

(ii)
- За визначенням, $\mathcal{A}(\mathcal{C}_2)$ — найменша σ-алгебра, яка містить $\mathcal{C}_2$
- Також $\mathcal{C}_2 \supseteq \mathcal{C}_1$
- Тому $\mathcal{A}(\mathcal{C}_2)$ також є найменшою σ-алгеброю, яка містить $\mathcal{C}_1$
- Відтак $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_2)$

(iii)
- Оскільки $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{C})$, за властивістю (ii) маємо, що $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C}))$
- З іншого боку, за визначенням, $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \bigcap_i \mathcal{A}_i$, де кожна σ-алгебра $\mathcal{A}_i \supseteq \mathcal{C}$
- Оскільки будь-яка σ-алгебра є алгеброю, а $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ — найменша з алгебр, що містить $\mathcal{C}$, то кожна $\mathcal{A}_i \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{C})$
- Відтак $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C})$, оскільки належить кожній множині із відповідного перетину
- Отже, за (i)–(ii), $\mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{C})) = \mathcal{A}(\mathcal{C})$
- $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C}))$ і $\mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C})$ разом мають наслідком $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C}))$

(iv)
- За (ii), із $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ випливає $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_2)$
- Також за (i)–(ii) маємо, що з $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$ випливає $\mathcal{A}(\mathcal{C}_2) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$
- Разом ці факти дають $\mathcal{A}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{C}_1)$

$\square$

План лекції

1 Алгебри

2 σ-Алгебри

3 Борелева σ-алгебра

- Раніше в нас був клас $\mathcal{I}$ усіх пів інтервалів і променів
- Алгебра $\mathcal{B}_0$ — клас усіх **скінченних** доповнень, об'єднань і перетинів множин із $\mathcal{I}$
- Очевидно, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{F}(\mathcal{I})$
- Ми хочемо дістати $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{I})$ — породжену σ-алгебру

Визначення (КЛ1.5.15)

σ-алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{O})$, яку породжує клас усіх **відкритих множин** дійсної оси $\mathcal{O}$, має назву **Борелевої σ-алгебри** (Borel σ-algebra), а множини, що їй належать, називають **Борелевими множинами** (Borel sets) $\square$

- А до чого тут клас відкритих множин $\mathcal{O}$, якщо нам потрібний клас пів інтервалів і променів $\mathcal{I}$?
- Виявляється, $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{I})$, що ми зараз і доведемо
- Просто визначення з використанням $\mathcal{O}$ працює в **найбільш загальних топологічних просторах**

Які множини є Борелевими?

Твердження (КЛ1.5.16)

1. Усі замкнені множини
2. Усі одноелементні множини $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$
3. Усі зліченні множини
4. Усі інтервали виду $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(-\infty; b)$, $[a; \infty)$

Доведення.

1. Будь-яка замкнена множина є доповненням відповідної відкритої множини
2. Кожна одноелементна $\{x\}$ множина є замкненою
3. Кожна зліченна множина є зліченним об'єднанням одноелементних множин
4. $[a; b] = (a; b) \cup \{a\} \cup \{b\}$, $(a; b] = (a; b) \cup \{b\}$ тощо

□

Що породжує Борелеву σ-алгебру?

Лема (КЛ1.5.17)

Борелеву σ-алгебру породжує множина **відкритих** інтервалів

$$\mathcal{I}_{\mathcal{O}} = \{(a;b)\ ,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

тобто $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$

Доведення.

- Спочатку доведімо $\mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{O})$:
  - $\mathcal{I}_{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$, бо відкритий інтервал — це відкрита множина
  - Тому $\mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{O})$ (Лема КЛ1.5.14)
- Тепер доведімо $\mathcal{A}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$:
  - Будь-яку відкриту множину в $\mathbb{R}$ можна утворити **зліченними об'єднаннями відкритих інтервалів** (Лема Ліндельофа (Lindelöf Lemma), яку ми доводити не будемо)
  - Отже $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$
  - Звідси $\mathcal{A}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$ (Лема КЛ1.5.14)
- Включення в обидва боки дає $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$

□

Що породжує Борелеву σ-алгебру?

Лема (КЛ1.5.18)

Борелеву σ-алгебру породжує множина $\mathcal{I}$, тобто $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}}) = \mathcal{A}(\mathcal{I})$

Доведення.

- Спочатку доведімо $\mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I})$:
  - $\mathcal{I}_{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I})$, оскільки відкриті інтервали вигляду $(a; b)$ можна утворити **зліченними об'єднаннями і доповненнями** пів інтервалів і променів
  - Справді, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(a; b) = \bigcup_{n=j}^{\infty} (a; b - 1/n]$ для деякого j такого, що $b - 1/n > a$
  - Тоді $\mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I})$ (Лема КЛ1.5.14)
- Тепер доведімо $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$:
  - $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$, оскільки будь-який пів інтервал чи промінь можна утворити **зліченними об'єднаннями і доповненнями** відкритих інтервалів
  - Справді, $(a; \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a; a + n)$ і

$$(a; b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a; b + \frac{1}{n}\right), \; (-\infty; b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b - n; b), \; (-\infty; b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty; b + \frac{1}{n}\right)$$

  - Звідси $\mathcal{A}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$ (Лема КЛ1.5.14)
- Включення в обидва боки дає $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}(\mathcal{I}_{\mathcal{O}})$ □

Що породжує Борелеву σ-алгебру?

Твердження (КЛ1.5.19)

Борелеву σ-алгебру породжує алгебра $\mathcal{B}_0$: $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_0)$

Доведення.

- Властивість (iii) Леми КЛ1.5.14: $\mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) = \mathcal{A}(\mathcal{C})$
- Ми знаємо, що $\mathcal{B}_0 = \mathcal{F}(\mathcal{I})$
- Отже $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathcal{I})) = \mathcal{A}(\mathcal{B}_0)$

□

Зауваження (КЛ1.5.20)

- Хоча $\mathcal{I}_\mathcal{O}$ також породжує $\mathcal{B}$, множина **скінченних** доповнень, об'єднань і перетинів **не є алгеброю**: наприклад, $(a;b)^c = (-\infty;a] \cup [b;\infty)$ не є відкритим інтервалом
- Особливого значення не має, **з якого боку** інтервали відкриті чи замкнені. Використання $(a;b]$ замість $[a;b)$ — це данина традиції
- Борелеву σ-алгебру також породжують **тільки** промені виду $(-\infty;x]$, $x \in \mathbb{R}$, **без** пів інтервалів
  - Це випливає з того факту, що $(a;b] = (-\infty;b] \setminus (-\infty;a]$

Підсумок

- Отже, чого ми досягли?
- Ми почали з класу пів інтервалів і променів $\mathcal{I}$ як очевидних видів подій на $\mathbb{R}$, які для нас цікаві
- Ми утворили алгебру $\mathcal{B}_0$ **скінченних** доповнень, об'єднань і перетинів множин із $\mathcal{I}$
- Ми з'ясували, що **скінченних** операцій недостатньо, і увели поняття σ-алгебри
- Ми з'ясували, що σ-алгебра не може містити **всіх** підмножин $\mathbb{R}$
- Ми зосередилися на σ-алгебрі $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, яку породжує клас $\mathcal{I}$
- Ми показали, що така σ-алгебра є Борелевою, тобто $\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{O})$
- Отже маємо вимірний простір $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ — **Борелеву дійсну вісь** (Borel real line)
- Як виявляється, Борелевими є навіть множини, які неможливо утворити зліченними теоретико-множинними операціями над інтервалами, тобто це **дуже-дуже** великий клас множин

- За аналогією з $\mathbb{R}$ можна увести поняття Борелевих множин у $\mathbb{R}^n$

Визначення (КЛ1.5.21)

σ-алгебра $\mathcal{B}^n = \mathcal{A}(\mathcal{O}^n)$, яку породжує клас усіх відкритих множин $\mathcal{O}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, має назву **Борелевої** (Borel), а множини, що їй належать, називають **Борелевими множинами** $\square$

- Можна показати, що n-вимірну Борелеву σ-алгебру породжують також n-вимірні прямокутники $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n \in \mathbb{R}^n$, де кожний $I_j \subset \mathcal{I}$, $j = 1, \ldots, n$

Борелева σ-алгебра в просторі $\mathbb{R}^n$ (1)

- Борелеву σ-алгебру $\mathcal{B}^n$ породжують n-вимірні аналоги променів $(-\infty; x]$:

$$S_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_i \le x_i \ , \ i = 1, \dots, n\} \ , \ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \ , \ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$$

- Кожну $A = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n \in \mathbb{R}^n$, $I_j \subset \mathcal{I}$, можна подати як

$$A = S_{(b_1,\dots,b_k)^\top} \setminus \left(S_{(a_1,b_2,\dots,b_k)^\top} \cup S_{(b_1,a_2,\dots,b_k)^\top} \cup \ldots \cup S_{(b_1,b_2,\dots,a_k)^\top}\right)$$

- Наприклад,

$$A = (a_1; b_1] \times (a_2; b_2] \ , \qquad A = S_{(b_1,b_2)^\top} \setminus \left(S_{(a_1,b_2)^\top} \cup S_{(b_1,a_2)^\top}\right)$$

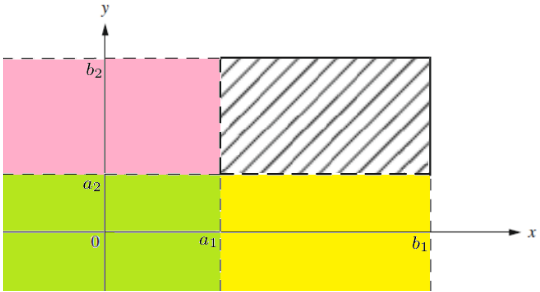


Рис. КЛ1.5.1

- A — штрихована область
- $S_{(a_1,b_2)^\top}$ — об'єднання рожевої й зеленої областей
- $S_{(b_1,a_2)^\top}$ — об'єднання зеленої й жовтої областей
- $S_{(b_1,b_2)^\top}$ — об'єднання **всіх** областей

Борелів простір

Визначення (КЛ1.5.22)

Вимірний простір $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ називають **Борелевим простором** (Borel space) $\square$