Теорія ймовірностей:
Практичне заняття 4
Умовна ймовірність

25 вересня 2025 р.

План заняття

План заняття

Визначення умовної ймовірности

Визначення (КЛ3.1.2)

- Нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$
- Нехай $A, B \in \mathcal{A}$ — деякі події
- Нехай $\mathbb{P}(B) > 0$
- **Умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{КЛ3.1.1}$$

- $\mathbb{P}(A)$ — **апріорна ймовірність** (prior)
- $\mathbb{P}(A \mid B)$ — **апостеріорна ймовірність** (posterior)

□

Особливості обумовлення

- Нескладно бачити, що

$$\mathbb{P}(A \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

- Якщо ми знаємо, що подія A сталася, то її ймовірність дорівнює 1

Зауваження (КЛ3.1.3)

- **Не існує такої події, як** $A \mid B$
- **Це просто позначення!**
- Насправді, існують **дві різні ймовірнісні міри**:

$$\mathbb{P}(\cdot) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ , \qquad \mathbb{P}(\cdot \mid B) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$$

- Іншими словами, з імовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}(\cdot))$ можна утворити **новий** імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}(\cdot \mid B))$, $B \in \mathcal{A}$

$\square$

Умовна ймовірність — це ймовірність

Твердження (КЛ3.1.4)

Умовна ймовірність $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ така, що

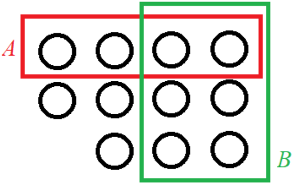
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\,, \quad A, B \in \mathcal{A}\,,\ \mathbb{P}(B) > 0$$

є ймовірнісною мірою

- Обумовлення не є комутативним: $\mathbb{P}(A \mid B) \neq \mathbb{P}(B \mid A)$ в загальному випадку

Обумовлення як перенормалізація

- Обумовлення події A подією B означає, що ми **перенормалізовуємо** ймовірнісну міру



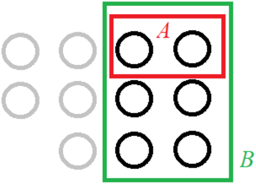


Рис. КЛ3.1.1: $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{11}$, проте $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- Пояснення для двох підходів до інтерпретації ймовірностей:
  - **Частотна інтерпретація**: $\mathbb{P}(A \mid B)$ як відносна частота події A **серед тих експериментів**, які закінчилися подією B
  - **Беєсівська інтерпретація**: оновлення суб'єктивної ймовірности після надходження додаткової інформації

Ланцюгове правило для умовних імовірностей

Твердження (КЛ3.1.7)

- Нехай $\mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) > 0$
- Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) &= \mathbb{P}\left(A_1\right) \mathbb{P}\left(A_2 \mid A_1\right) \mathbb{P}\left(A_3 \mid A_1, A_2\right) \ldots \mathbb{P}\left(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(A_2\right) \mathbb{P}\left(A_1 \mid A_2\right) \mathbb{P}\left(A_3 \mid A_1, A_2\right) \ldots \mathbb{P}\left(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}\right) \\ &= \ldots \end{aligned} \tag{КЛ3.1.3}$$

і т.д. для всіх можливих комбінацій подій

Теорема Беєса

Теорема (Теорема Беєса (Bayes' Theorem), КЛ3.3.1)

- Нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$
- Для подій $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) > 0$, справедливо:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \tag{КЛ3.3.1}$$

Теорема (Закон повної ймовірности (Law of total probability), КЛ3.3.2)

- Нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$
- Розгляньмо розбиття: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
- Нехай $\mathbb{P}(A_i) > 0$ для всіх i
- Тоді

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i) \, \mathbb{P}(A_i) \tag{КЛ3.3.2}$$

Обумовлення декількома подіями

Твердження (КЛ3.3.6)

- Нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$
- Нехай $A, B, C \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$
- Тоді
$$\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C)\,\mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)} \tag{КЛ3.3.3}$$

Твердження (КЛ3.3.7)

- Нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$
- Нехай $A_1, \ldots, A_n$ — деяке його розбиття
- Нехай $\mathbb{P}(A_i \cap B) > 0$ для всіх i
- Тоді
$$\mathbb{P}(B \mid C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i, C)\,\mathbb{P}(A_i \mid C) \tag{КЛ3.3.4}$$

Визначення незалежних подій

Визначення (КЛ3.4.1)

- Події A і B називають **незалежними** (independent)($A \perp\!\!\!\perp B$), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \tag{КЛ3.4.1}$$

- Якщо $\mathbb{P}(A) > 0$ і $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)\ , \qquad \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$$

$\square$

- Обумовлення однієї події іншою в жодний спосіб не впливає на її ймовірність
- Звідси випливає **правило множення** для комбінаторних формул

Незалежність і доповнення

Твердження (КЛ3.4.3)

Якщо події $A \perp\!\!\!\perp B$, то $A \perp\!\!\!\perp B^c$, $A^c \perp\!\!\!\perp B$, $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Незалежність декількох подій

Визначення (КЛ3.4.4)

- Події $A_1, \ldots, A_n$ незалежні ($A_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp A_n$), якщо:
  - $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$ для всіх $i \neq j$
  - $\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A_k)$ для всіх i, j, k різних
  - і т.д.
- Події зі зліченної послідовности $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ незалежні, якщо незалежними є **будь-яке скінченне число** подій із послідовности

□

Визначення (КЛ3.4.7)

Події A і B **умовно незалежні** (conditionally independent) за умови настання події C ($A \perp\!\!\!\perp B \mid C$), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\,\mathbb{P}(B \mid C)$$

$\square$

- Умовна незалежність **прямо не пов'язана** з безумовною незалежністю

План заняття

Застосування визначення

Вправа (Практикум4.2.1)

- Нехай, на мою думку, є ймовірність 80%, що мої ключі лежать в одній із двох кишень куртки
- (По 40% на кожну з двох кишень)
- Якщо в **одній** немає ключів, то яка ймовірність, що вони є в **другій**?

□

Розв'язання.

- Позначмо $L =$«ключі лежать у лівій кишені»
- Позначмо $R =$«ключі лежать у правій кишені»
- За (КЛ3.1.1) маємо:

$$\mathbb{P}\left(R \mid L^c\right) = \frac{\mathbb{P}\left(R \cap L^c\right)}{\mathbb{P}\left(L^c\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(R\right)}{1 - \mathbb{P}\left(L\right)} = \frac{0.4}{1 - 0.4} = \frac{2}{3}$$

□

Перетин через умовну ймовірність

Вправа (Практикум4.2.2)

- Нехай у вазі є 8 червоних куль і 4 білі кулі
- Ми витягаємо 2 кулі **без повторень**
- Чому дорівнює ймовірність, що обидві кулі будуть червоні?

□

Розв'язання.

- Позначмо $R_i =$«i-та витягнута куля червона», $i = 1, 2$
- Класичне визначення ймовірности дає

$$\mathbb{P}\left(R_1 \cap R_2\right) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{14}{33}$$

- Альтернативний варіант — через призму умовної ймовірности:

$$\mathbb{P}\left(R_1 \cap R_2\right) = \mathbb{P}\left(R_1\right)\mathbb{P}\left(R_2 \mid R_1\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

□

Перетин через умовну ймовірність

Вправа (Практикум4.2.2)

Продовження...

- Нехай тепер усі червоні кулі мають вагу r, а білі — w
- Нехай імовірність витягнути кулю дорівнює **відношенню** її **ваги** до **ваги всієї вази**
- Чому дорівнює ймовірність, що обидві кулі будуть червоні?

□

Розв'язання.

- Спочатку маємо вазу вагою $8r + 4w$
- Імовірність витягти деяку червону кулю дорівнює

$$\mathbb{P}(R_1) = 8 \cdot \frac{r}{8r + 4w}$$

- Після першого витягу у вазі залишаються кулі вагою $7r + 4w$
- Остаточно маємо

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{8r}{8r + 4w} \cdot \frac{7r}{7r + 4w}$$

□

Ланцюгове правило

Вправа (Практикум4.2.3)

- Нехай маємо групу з 8 футбольних команд
- 4 команди вважають сильними, а інші 4 — слабкими
- Пари суперників визначають у **випадковий** спосіб
- Чому дорівнює ймовірність, що **жодна** з **сильних** команд не зіграє з **сильним** суперником?

□

Розв'язання.

- Розгляньмо подію W_i =«сильна команда i зіграє проти слабкої», $i = 1, 2, 3, 4$
- Нас цікавить імовірність

$$\mathbb{P}(W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4) = \mathbb{P}(W_1)\,\mathbb{P}(W_2 \mid W_1)\,\mathbb{P}(W_3 \mid W_1, W_2)\,\mathbb{P}(W_4 \mid W_1, W_2, W_3)$$

- Усі ймовірності однакові, тому $\mathbb{P}(W_1) = \dfrac{4}{7}$
- Якщо W_1 сталася, то $\mathbb{P}(W_2 \mid W_1) = \dfrac{3}{5}$
- Остаточно

$$\mathbb{P}(W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{35}$$

□

План заняття

Застосування формул

Вправа (Практикум4.3.1)

- Нехай маємо страхову компанію
- Клієнти є двох типів: із **високим** ризиком і з **низьким** ризиком
- Імовірність страхового випадку **протягом 1 року** така:
  - Для високого ризику — 0.4
  - Для низького ризику — 0.2
- Відомо, що 30% населення мають **високий** ризик
- Чому дорівнює ймовірність, що новий клієнт протягом 1 року потрапить у страховий випадок?

□

Розв'язання.

- Нехай A_1 =«станеться страховий випадок протягом 1 року»
- Нехай R =«клієнт має високий ризик»
- Цілком очевидно, що R і R^c утворюють розбиття всього простору («усіх людей»)
- Тоді за законом повної ймовірности (КЛ3.3.2):

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \mid R)\,\mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(A_1 \mid R^c)\,\mathbb{P}(R^c) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.26$$

□

Вправа (Практикум4.3.1)

Продовження...

- Нехай клієнт придбав поліс
- Протягом 1 року стався страховий випадок
- Чому дорівнює ймовірність, що він мав високий ризик?

□

Розв'язання.

- Застосуймо Теорему Беєса (КЛ3.3.1):

$$\mathbb{P}(R \mid A_1) = \frac{\mathbb{P}(R)\,\mathbb{P}(A_1 \mid R)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.26} = \frac{6}{13} \approx 0.462$$

□

Застосування формул

Вправа (Практикум4.3.1)

Продовження...

- Нехай протягом 1 року *вже мав* місце страховий випадок
- Нехай страхові випадки *для деякої конкретної особи* є незалежні
- Чому дорівнює ймовірність, що буде страховий випадок **після** 1 року?

□

Розв'язання.

- Нехай A_2 =«станеться страховий випадок після 1 року»
- Тут працює закон повної ймовірности з додатковими подіями (КЛ3.3.4):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) &= \mathbb{P}(A_2 \mid R, A_1)\,\mathbb{P}(R \mid A_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid R^c, A_1)\,\mathbb{P}(R^c \mid A_1)\\ &= \mathbb{P}(A_2 \mid R)\,\mathbb{P}(R \mid A_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid R^c)\,(1 - \mathbb{P}(R \mid A_1))\\ &= 0.4 \cdot \frac{6}{13} + 0.2 \cdot \frac{7}{13} \approx 0.29\end{aligned}$$

- Зверніть увагу, що $\mathbb{P}(A_2 \mid R, A_1) = \mathbb{P}(A_2 \mid R)$, тобто події $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2 \mid R$ (**умовно** незалежні)
- Але $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = 0.29 \neq 0.26 = \mathbb{P}(A_2)$, тобто вони не є **безумовно** незалежні

□

Трішки цікавіший приклад

Вправа (Практикум4.3.2)

- Нехай стався злочин
- Відомо, що його скоїв один із n чоловіків
- Кожен чоловік міг стати злочинцем з однаковою ймовірністю
- **Свідок** стверджує, що злочин скоїв чоловік із **6 пальцями**
- Нехай p_0 — імовірність того, що **невинуватий** чоловік має 6 пальців
- Нехай p_1 — імовірність того, що **зловмисник** має 6 пальців
- Нехай $p_0 < p_1$, $p_1 < 1$
- Вважатимемо, що чоловіки можуть мати 6 пальців **незалежно** один від одного
- Заарештовано підозрюваного, у нього 6 пальців
- Чому дорівнює ймовірність, що **саме він** є злочинець?

□

Розв'язання.

- Позначмо A =«заарештований є злочинець», B =«заарештований має 6 пальців»
- Імовірності з умови задачі можна записати як:

$$p_1 = \mathbb{P}(B \mid A) \ , \quad p_0 = \mathbb{P}(B \mid A^c) \ , \quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{n}$$

- За Теоремою Беєса КЛ3.3.1 і формулою повної ймовірности (КЛ3.3.2),

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid A^c)\,\mathbb{P}(A^c)}$$

- Отже

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{p_1 \cdot \frac{1}{n}}{p_1 \cdot \frac{1}{n} + p_0\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{p_1}{p_1 + p_0(n-1)}$$

□

Трішки цікавіший приклад

Вправа (Практикум4.3.2)

Продовження...

- Поліція перевірила **кожного** з n можливих чоловіків
- Знайшовся **єдиний** чоловік із 6 пальцями
- Чому дорівнює ймовірність, що **він** є злочинцем?

Розв'язання.

- Нехай $N =$«ніхто, окрім заарештованого, не має 6 пальців»
- Тоді

$$\mathbb{P}(A \mid B, N) = \frac{\mathbb{P}(B \cap N \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \cap N \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap N \mid A^c)\,\mathbb{P}(A^c)}$$

- Можемо порахувати ймовірність

$$\mathbb{P}(B \cap N \mid A) = p_1(1 - p_0)^{n-1}$$

- Можемо порахувати ймовірність

$$\mathbb{P}(B \cap N \mid A^c) = p_0(1 - p_1)(1 - p_0)^{n-2}$$

Розв'язання.

Продовження...

- Отже

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A \mid B, N\right) &= \frac{p_1(1-p_0)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}}{p_1(1-p_0)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + p_0(1-p_1)(1-p_0)^{n-2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{p_1(1-p_0)}{p_1(1-p_0)+p_0(1-p_1)(n-1)}\end{aligned}$$

□

Приклад (Практикум4.3.3)

- Класична задача на основі телешоу *Let's Make a Deal* (канал NBC)
- Троє дверей: за одними ховається машина, а за іншими двома — по козі
- Учасник обирає котрісь із дверей
- Ведучий Монті Голл відчиняє одні з тих дверей, **що залишилися**, а там — коза
- Учаснику пропонують **змінити** рішення або **залишити** початкове
- Після ухвалення рішення двері відчиняють і стає зрозуміло, чи виграв учасник
- Чи варто змінювати своє початкове рішення і вибирати інші двері?

□

Приклад (Практикум4.3.3)

Продовження...

- Нехай двері пронумеровано від 1 до 3
- Не зменшуючи загалу, вважатимемо, що учасник завжди обирає двері 1
- Позначмо C_i =«машина ховається за дверима номер i», $i = 1, 2, 3$
- Позначмо A =«виграно машину, якщо початковий вибір не змінено»
- За законом повної ймовірности

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid C_1) \cdot \frac{1}{3} + \mathbb{P}(A \mid C_2) \cdot \frac{1}{3} + \mathbb{P}(A \mid C_3) \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- Аналогічно для події B =«виграно машину, якщо початковий вибір змінено»:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid C_1) \cdot \frac{1}{3} + \mathbb{P}(B \mid C_2) \cdot \frac{1}{3} + \mathbb{P}(B \mid C_3) \cdot \frac{1}{3} = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

□

Приклад (Практикум4.3.3)

Продовження...

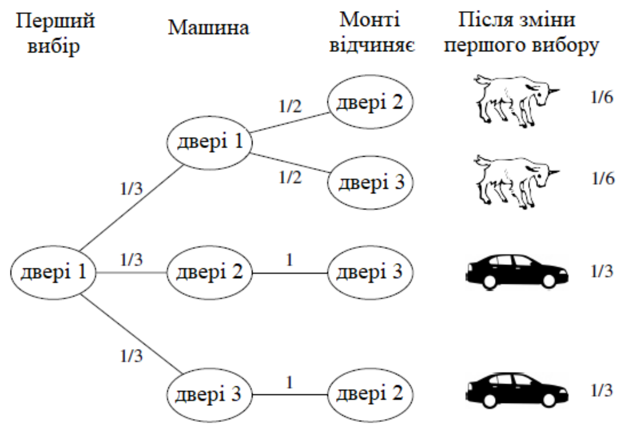


Рис. Практикум4.3.1

Приклад (Практикум4.3.3)

Продовження...

- Можна застосувати Теорему Беєса (КЛ3.3.1)
- Нехай M_j =«Монті відчинив двері j», $j = 2, 3$
- Нескладно бачити, що

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_2) &= \mathbb{P}(M_2 \mid C_1)\,\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(M_2 \mid C_2)\,\mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}(M_2 \mid C_3)\,\mathbb{P}(C_3) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- Тоді

$$\mathbb{P}(C_1 \mid M_2) = \frac{\mathbb{P}(M_2 \mid C_1)\,\mathbb{P}(C_1)}{\mathbb{P}(M_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

□

Розбиття на декілька подій

Вправа (Практикум4.3.4)

- Нехай маємо ліхтарики трьох типів: 20% типу 1, 30% типу 2 і 50% типу 3
- На основі наявних даних відомо, що ймовірність роботи понад 100 годин:
  - Для типу 1: 0.7
  - Для типу 2: 0.4
  - Для типу 3: 0.3
- Чому дорівнює ймовірність, що вибраний навмання ліхтарик пропрацює понад 100 годин?

$\square$

Розв'язання.

- Позначмо $A =$«ліхтарик пропрацює понад 100 годин»
- Позначмо $F_j =$«вибрано ліхтарик типу j», $j = 1, 2, 3$
- Оскільки три типи ліхтариків утворюють розбиття простору, застосовуємо формулу повної ймовірности:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(A \mid F_j)\, \mathbb{P}(F_j) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.41 \qquad \square$$

Розбиття на декілька подій

Вправа (Практикум4.3.4)

Продовження...

- Нехай випадково вибраний ліхтарик пропрацював понад 100 годин
- Чому дорівнює ймовірність, що він був типу 1? 2? 3?

□

Розв'язання.

- Застосуймо Теорему Беєса (КЛ3.3.1):

$$\mathbb{P}(F_1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid F_1)\,\mathbb{P}(F_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.41} = \frac{14}{41}$$

$$\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid F_2)\,\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.41} = \frac{12}{41}$$

$$\mathbb{P}(F_3 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid F_3)\,\mathbb{P}(F_3)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.41} = \frac{15}{41}$$

□

План заняття

Вправа (Практикум4.4.1)

- Нехай події A, B і C незалежні
- Покажіть, що

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))(1 - \mathbb{P}(C))$$

$\square$

Розв'язання.

- Потрібно перейти від об'єднання до перетину
- Можна застосувати для цього закони де Моргана:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}((A^c \cap B^c \cap C^c)^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c)$$

- Згадаймо Твердження КЛ3.4.3: якщо події незалежні, то незалежні також і їхні доповнення
- Тому

$$1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(B^c)\,\mathbb{P}(C^c) = 1 - (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))(1 - \mathbb{P}(C))$$

Вправа (Практикум4.4.2)

- Нехай немовля плаче тоді й тільки тоді, коли воно:
  - Голодне
  - Втомлене
  - Одночасно голодне і втомлене
- Позначмо C =«дитина плаче», H =«дитина голодна», T =«дитина втомлена»
- Нехай $\mathbb{P}(C) = c$, $\mathbb{P}(H) = h$, $\mathbb{P}(T) = t$, $0 < c, h, t < 1$
- Нехай $H \perp\!\!\!\perp T$
- Чому дорівнюють імовірності $\mathbb{P}(H \mid C)$, $\mathbb{P}(T \mid C)$ і $\mathbb{P}(H \cap T \mid C)$?

$\square$

Розв'язання.

- Застосуймо Теорему Беєса КЛ3.3.1:

$$\mathbb{P}(H \mid C) = \frac{\mathbb{P}(C \mid H)\,\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1 \cdot h}{c} = \frac{h}{c}$$

$$\mathbb{P}(T \mid C) = \frac{\mathbb{P}(C \mid T)\,\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1 \cdot t}{c} = \frac{t}{c}$$

$$\mathbb{P}(H \cap T \mid C) = \frac{\mathbb{P}(C \mid H, T)\,\mathbb{P}(H \cap T)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1 \cdot ht}{c} = \frac{ht}{c}$$

□

Вправа (Практикум4.4.2)

Продовження...

- Чи можна казати, що $H \perp\!\!\!\perp T \mid C$?

□

Розв'язання.

- Повинна виконуватися рівність

$$\mathbb{P}\left(H \cap T \mid C\right) = \mathbb{P}\left(H \mid C\right)\mathbb{P}\left(T \mid C\right)$$

- Можна бачити, що

$$\mathbb{P}\left(H \cap T \mid C\right) = \frac{ht}{c} \quad \neq \quad \mathbb{P}\left(H \mid C\right)\mathbb{P}\left(T \mid C\right) = \frac{h}{c} \cdot \frac{t}{c} = \frac{ht}{c^2}$$

□

Приклад (Практикум4.4.3)

- Нехай двоє осіб, A і B, беруть участь у грі
- Якщо монетка випадає гербом, то B віддає A 1 гривню
- Якщо монетка випадає числом, то A віддає B 1 гривню
- Гра триває, допоки хтось із учасників не втратить **усіх** грошей
- Імовірність випаду герба дорівнює $\mathbb{P}(H) = p$
- На початку гри A має i гривень, а B — $(N - i)$ гривень
- Чому дорівнює ймовірність події E, що A виграє всі гроші?

$\square$

Приклад (Практикум4.4.3)

Продовження...

- Нехай $\mathbb{P}(E) = P_i$, щоб підкреслити, що це ймовірність виграти за умови, що на початку гри учасник A має i гривень
- Можемо застосувати формулу повної ймовірности, виконавши обумовлення першим випадом монетки:

$$P_i = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \mid H)\,\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(E \mid H^c)\,\mathbb{P}(H^c) = p\mathbb{P}(E \mid H) + (1-p)\mathbb{P}(E \mid H^c)$$

- $\mathbb{P}(E \mid H) \Rightarrow$ в учасника A буде $i+1$ гривень, а в учасника B буде $N-(i+1)$ гривень
- Розгляньмо **частину гри**, яка починається після випаду герба, як **окрему гру**:

$$\mathbb{P}(E \mid H) = P_{i+1}\ , \quad \mathbb{P}(E \mid H^c) = P_{i-1}$$

□

Приклад (Практикум4.4.3)

Продовження...

- Отже
$$P_i = pP_{i+1} + (1-p)P_{i-1}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$$
- Маємо $N-1$ рівнянь і $N+1$ невідомих $(P_0, P_1, \ldots, P_N)$
- Додамо $P_0 = 0$ і $P_N = 1$
- Перепишімо

$$pP_i + (1-p)P_i = pP_{i+1} + (1-p)P_{i-1} \quad \Rightarrow \quad P_{i+1} - P_i = \frac{1-p}{p}(P_i - P_{i-1})$$

□

Приклад (Практикум4.4.3)

Продовження...

- Маємо

$$
\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= \frac{1-p}{p} P_1 \\
P_3 - P_2 &= \frac{1-p}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 P_1 \\
&\vdots \\
P_i - P_{i-1} &= \frac{1-p}{p}(P_{i-1} - P_{i-2}) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i-1} P_1 \\
&\vdots \\
P_N - P_{N-1} &= \frac{1-p}{p}(P_{N-1} - P_{N-2}) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{N-1} P_1
\end{aligned}
$$

□

Приклад (Практикум4.4.3)

Продовження...

- Додавши перші $i-1$ рівнянь, дістаємо

$$P_i - P_1 = P_1 \cdot \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{1-p}{p} \right)^k$$

- З урахуванням формули суми геометричної прогресії,

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-((1-p)/p)^i}{1-(1-p)/p} P_1 \ , & \dfrac{1-p}{p} \neq 1 \\ iP_1 \ , & \dfrac{1-p}{p} = 1 \end{cases}$$

□

Приклад (Практикум4.4.3)

Продовження...

- Оскільки $P_N = 1$, маємо

$$1 = \begin{cases} \dfrac{1-((1-p)/p)^N}{1-(1-p)/p} P_1 \ , & p \neq \frac{1}{2} \\ N P_1 \ , & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Звідси

$$P_1 = \begin{cases} \dfrac{1-(1-p)/p}{1-((1-p)/p)^N} \ , & p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{N} \ , & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Остаточно маємо

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-((1-p)/p)^i}{1-((1-p)/p)^N} \ , & p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{i}{N} \ , & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

□

Приклад (Практикум4.4.3)

Продовження...

- Нехай Q_i — імовірність виграшу учасника B, якщо він починає з $N-i$ гривнями
- За абсолютною симетрією,

$$Q_i = \begin{cases} \dfrac{1-(p/(1-p))^{N-i}}{1-(p/(1-p))^N}, & 1-p \neq \frac{1}{2} \\ \dfrac{N-i}{N}, & 1-p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Додаймо ці дві ймовірності
- Якщо $p = \frac{1}{2}$, маємо

$$\frac{i}{N} + \frac{N-i}{N} = 1$$

□

Приклад (Практикум4.4.3)

Продовження...

- Якщо ж $p \neq \frac{1}{2}$, маємо

$$\begin{aligned} P_i + Q_i &= \frac{1 - ((1-p)/p)^i}{1 - ((1-p)/p)^N} + \frac{1 - (p/(1-p))^{N-i}}{1 - (p/(1-p))^N} \\ &= \frac{p^N - p^N \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{p^N - (1-p)^N} + \frac{(1-p)^N - (1-p)^N \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N-i}}{(1-p)^N - p^N} \\ &= \frac{p^N - p^{N-i}(1-p)^i - (1-p)^N + (1-p)^i p^{N-i}}{p^N - (1-p)^N} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Тобто маємо, що ймовірність того, що **ніхто з них** не виграє, **дорівнює 0**
- Іншими словами, гра **обов'язково** повинна закінчитися за **скінченну** кількість кроків

□

Приклад (Практикум4.4.3)

Продовження...

- Цікаві числові приклади
- Нехай A починає з 5 гривнями, а B — з 10 гривнями
- Якщо $p = 0.5$,

$$P_5 = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

- Якщо $p = 0.6$,

$$P_5 = \frac{1 - ((1 - 0.6)/0.6)^5}{1 - ((1 - 0.6)/0.6)^{15}} \approx 0.87$$

- Нехай обидва гравці починають грати зі 100 гривнями кожен
- Якщо $p = 0.5$, очевидно, що $P_{100} = \frac{100}{200} = 0.5$
- Якщо $p = 0.49$, маємо

$$P_{100} = \frac{1 - ((1 - 0.49)/0.49)^{100}}{1 - ((1 - 0.49)/0.49)^{200}} \approx 0.018$$

□

Вправа (Практикум4.4.4)

- Нехай у турнірі планують зіграти 64 команди
- Маємо 4 групи по 16 команд
- Команди пронумеровано від 1 до 16 залежно від їхнього рейтингу
- Команди грають одна з одною на виліт (графік на наступному слайді)
- Нехай $r(i,j) = r(j,i)$, $i \neq j$ — номер раунду, у якому i може зіграти проти j
  - Якщо команди 1 і 16 грають у першому раунді, $r(1,16) = 1$
  - Якщо команди 1 і 5 потенційно можуть зіграти у півфіналі, $r(1,5) = 3$
- Імовірність перемогти дорівнює $p_{i,j} = 1 - p_{j,i}$
- Імовірність перемоги **не залежить** від попередніх успіхів чи невдач (велике припущення!)
- Чому дорівнює ймовірність P_i перемоги команди i у групі, $i = 1, \ldots, 16$?

$\square$

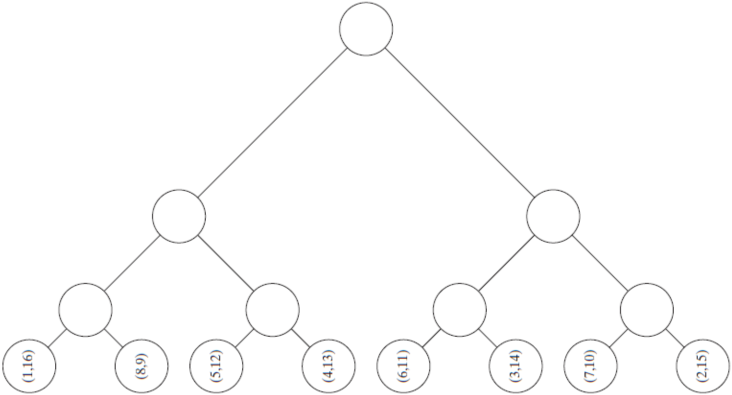


Рис. Практикум4.4.1

Розв'язання.

- Розгляньмо ймовірності $P_i(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, того, що команда i виграє в k-ому раунді
- Нехай $O_i(k) = \{j : r(i,j) = k\}$ — множина можливих суперників команди i в раунді k
- Перемога в раунді k передбачає перемоги раніше:

$$P_i(k) = \sum_{j \in O_i(k)} \mathbb{P}\left(\text{команда } i \text{ виграла } k \text{ ігор} \mid \text{команда } j \text{ дійшла до раунду } k\right)$$
$$\times P_j(k-1)$$

- Маємо

$$\mathbb{P}\left(i \text{ виграла } k \text{ ігор} \mid j \text{ дійшла до раунду } k\right)$$
$$= \mathbb{P}\left((i \text{ дійшла до раунду } k) \cap (i \text{ перемогла } j) \mid j \text{ дійшла до раунду } k\right)$$

Розбиття задачі на рекурентні підзадачі

Розв'язання.

Продовження...

- Далі варто помітити, що за визначенням умовної ймовірности,

$$\mathbb{P}\left(i \text{ перемогла } j \mid i \text{ дійшла до раунду } k, j \text{ дійшла до раунду } k\right)$$
$$= \frac{\mathbb{P}\left((i \text{ дійшла до раунду } k) \cap (i \text{ перемогла } j) \mid j \text{ дійшла до раунду } k\right)}{\mathbb{P}\left(i \text{ дійшла до раунду } k \mid j \text{ дійшла до раунду } k\right)}$$

- Події зі знаменника є незалежні, а тому можна записати

$$\mathbb{P}\left((i \text{ дійшла до раунду } k) \cap (i \text{ перемогла } j) \mid j \text{ дійшла до раунду } k\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(i \text{ перемогла } j \mid i \text{ дійшла до раунду } k, j \text{ дійшла до раунду } k\right)$$
$$\times \mathbb{P}\left(i \text{ дійшла до раунду } k\right)$$

- Остаточно маємо

$$\mathbb{P}\left(i \text{ виграла } k \text{ ігор} \mid j \text{ дійшла до раунду } k\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(i \text{ перемогла } j \mid i \text{ дійшла до раунду } k, j \text{ дійшла до раунду } k\right)$$
$$\times \mathbb{P}\left(i \text{ дійшла до раунду } k\right) = p_{i,j} P_i(k-1)$$

Розбиття задачі на рекурентні підзадачі

Розв'язання.

Продовження...

- Тоді маємо

$$P_i(k) = \sum_{j \in O_i(k)} p_{i,j} P_i(k-1) P_j(k-1) = P_i(k-1) \sum_{j \in O_i(k)} p_{i,j} P_j(k-1)$$

- Очевидно, $P_i(0) = 1$, $i = 1, \ldots, 16$
- Можна підрахувати **в рекурсивний спосіб**

Розбиття задачі на рекурентні підзадачі

Розв'язання.

Продовження...

- Наприклад, нехай $p_{i,j} = \frac{j}{i+j}$, тоді

$$P_1(1) = p_{1,16} = \frac{16}{17} = 1 - P_{16}(1)$$
$$P_2(1) = p_{2,15} = \frac{15}{17} = 1 - P_{15}(1)$$
$$P_3(1) = p_{3,14} = \frac{14}{17} = 1 - P_{14}(1)$$
$$P_4(1) = p_{4,13} = \frac{13}{17} = 1 - P_{13}(1)$$
$$P_5(1) = p_{5,12} = \frac{12}{17} = 1 - P_{12}(1)$$
$$P_6(1) = p_{6,11} = \frac{11}{17} = 1 - P_{11}(1)$$
$$P_7(1) = p_{7,10} = \frac{10}{17} = 1 - P_{10}(1)$$
$$P_8(1) = p_{8,9} = \frac{9}{17} = 1 - P_9(1)$$

Розбиття задачі на рекурентні підзадачі

Розв'язання.

Продовження...

- Для раунду 2 маємо

$$P_1(2) = P_1(1)(P_8(1)p_{1,8} + P_9(1)p_{1,9}) = \frac{16}{17}\left(\frac{9}{17}\cdot\frac{8}{9} + \frac{8}{17}\cdot\frac{9}{10}\right) \approx 0.842$$

- І т.д.

$\square$