Теорія ймовірностей:
Лекція 7
Дискретні випадкові величини. Схема Бернуллі

Данило Тавров

22 вересня 2025 р.

План лекції

1. Сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини
2. Дискретний рівномірний розподіл
3. Схема Бернуллі

Що було минулого разу

- Ми з'ясували, що випадкова величина — це (вимірна) функція $X : \Omega \to \mathbb{R}$

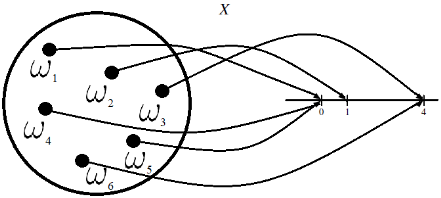


Рис. КЛ4.1.1

- Сама по собі функція X є **детермінованою**
- «Випадковість» постає з випадкової природи експерименту

Що було минулого разу

Визначення (КЛ4.1.6)

- Функція (випадкова величина) X задає на вимірному просторі $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ймовірнісну міру

$$\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}_X(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) \ , \qquad A \in \mathcal{B} \tag{КЛ4.1.1}$$

- Таку міру називають **розподілом випадкової величини** X (distribution of a random variable)
- $\mathbb{P}_X$ є **образом міри** $\mathbb{P}$ під дією функції X ($\mathbb{P}_X$ is a measure **induced by** X)

$\square$

- На практиці нас цікавлять імовірності подій **за участю випадкових величин**
- Наприклад, імовірність, що $X > 0$ або $X \in [1; 5]$ тощо
- Імовірність такої події A можна обчислити за допомогою розподілу: $\mathbb{P}_X(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$
- Тоді природа ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ нас **мало цікавить**

Що було минулого разу

Визначення (КЛ4.2.1)

Випадкову величину X називають **дискретною**, як і відповідний їй розподіл, якщо носій $\operatorname{supp}(X)$ є не більш ніж зліченним $\square$

- Хотілось би мати можливість обчислювати ймовірності для X, не звертаючись до початкової міри $\mathbb{P}$

Визначення (КЛ4.2.3)

- Дискретна випадкова величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ з носієм $\operatorname{supp}(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$
- **Функція ймовірности** (probability mass function) $p_X(x) \equiv \mathbb{P}_X(X = x)$:

$$p_X(x) \begin{cases} \neq 0\,, & x \in \{x_1, x_2, \ldots\} \\ = 0\,, & x \notin \{x_1, x_2, \ldots\} \end{cases}, \qquad \sum_i p_X(x_i) = 1 \tag{КЛ4.2.1}$$

- За Теоремою КЛ2.3.1, p_X визначає розподіл випадкової величини:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i) \tag{КЛ4.2.2}$$

План лекції

1. Сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини
2. Дискретний рівномірний розподіл
3. Схема Бернуллі

Мотивація сподівання

- Як підрахувати **середнє значення** (mean) випадкової величини X?
- По-перше, що називати «середнім значенням»?
- Ми знаємо **арифметичне середнє** (arithmetic mean) деяких чисел $x_1, \ldots, x_n$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Узагальненням є **зважене середнє** (weighted mean):

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \ , \quad \sum_{i} w_i = 1$$

  де $w_i \in [0; 1]$ — **вагові коефіцієнти** (weights)
- Для арифметичного середнього $w_i = \frac{1}{n}$ для всіх i
- Для дискретної випадкової величини природним є вибір вагових коефіцієнтів як **імовірностей** відповідних значень

Визначення (КЛ4.3.1)

- **Сподіванням** (expectation) дискретної випадкової величини X є зважене середнє

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} x \cdot \mathbb{P}_X(X = x) \tag{КЛ4.3.1}$$

- Сподівання може бути нескінченно великим
- Якщо одночасно

$$\mathbb{E}\left[X^+\right] \equiv \sum_{\substack{x \in \operatorname{supp}(X) \\ x > 0}} x \cdot \mathbb{P}_X(X = x) = \infty$$

$$\mathbb{E}\left[X^-\right] \equiv \sum_{\substack{x \in \operatorname{supp}(X) \\ x < 0}} (-x) \cdot \mathbb{P}_X(X = x) = \infty$$

то кажуть, що сподівання **не існує** (does not exist)

□

Сподівання є сталою

Зауваження (КЛ4.3.2)

- $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, тобто воно є (сталим) **числом**
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$, тобто випадкова величина є (випадковою) **функцією**
- Сподівання є **фіксоване значення**, **невипадкове**, яке заздалегідь відоме і може бути обчислено

$\square$

Зауваження (КЛ4.3.3)

- Поняття сподівання подібне до поняття центру мас у фізиці

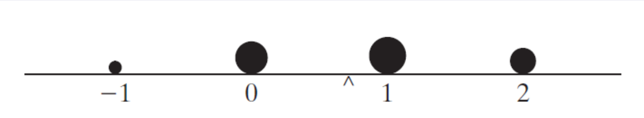


Рис. КЛ4.3.1

- Тут маємо дискретну випадкову величину X із функцією ймовірности $p(x_i)$, $i \geq 1$
- Кулі масою $p(x_i)$ в точках x_i, $i \geq 1$ на стрижні
- $\mathbb{E}[X]$ = точка, в якій стрижень перебуватиме в стані рівноваги (центр мас)

□

Простий приклад

Приклад (КЛ4.3.4)

- Страхова компанія виплачує 10 тис. грн за втрачений багаж
- Історичні дані свідчать, що страховий випадок настає для 1 із 200 проданих полісів
- Яку потрібно встановити вартість одного полісу, щоб принаймні вийти в нуль?
- Нехай випадкова величина X =«втрати страхової компанії» має таку функцію ймовірности:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{200}, & x = -10{,}000 \\ 1 - \dfrac{1}{200}, & x = 0 \end{cases}$$

- Тоді сподівані втрати компанії становлять

$$\mathbb{E}[X] = -\frac{10{,}000}{200} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{200}\right) = -50$$

- Для покриття видатків брати за поліс не менше від 50 грн

Лінійність сподівання

Твердження (КЛ4.3.5)

- Нехай дискретні випадкові X і Y визначено на одному $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- Для будь-яких чисел $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \tag{КЛ4.3.2}$$

Доведення.

- Нехай носій $\operatorname{supp}(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$
- Тоді, за (КЛ4.1.1), $\mathbb{P}_X(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x_i\})$
- Відтак $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} x\mathbb{P}_X(X = x) &= \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} x\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x\}) \\ &= \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} x \sum_{\omega : X(\omega) = x} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} \sum_{\omega : X(\omega) = x} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\end{aligned}$$

Доведення.

Продовження...

- Аналогічно можна подати

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

- Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[aX+bY] &= \sum_{\omega\in\Omega}(aX+bY)(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}(aX(\omega)+bY(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= a\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + b\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = a\mathbb{E}[X]+b\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

$\square$

Теорема (Закон несвідомого статистика для дискретних величин (Law of unconscious statistician for discrete variables), КЛ4.3.6)

- Нехай X — деяка дискретна випадкова величина
- Нехай її носій є $\operatorname{supp}(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$
- Нехай її функція ймовірности є $p_X(x) = \mathbb{P}_X(X = x)$
- Нехай $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — **деяка** функція
- Тоді

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x) \mathbb{P}_X(X = x) \tag{КЛ4.3.3}$$

Доведення.

- Носій величини $g(X)$: $\operatorname{supp}(g(X)) = \{g(x_1), g(x_2), \ldots\}$
- Може бути $g(x_i) = g(x_j)$ для деяких $i \neq j$
- За (КЛ4.1.1),

$$\mathbb{P}_{g(X)}\left(g(X) = x_i'\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega : g(X(\omega)) = x_i'\right\}\right)$$

Доведення.

Продовження...

- Відтак

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(X)\right] &= \sum_{x' \in \operatorname{supp}(g(X))} x' \mathbb{P}_{g(X)}\left(g(X) = x'\right) \\
&= \sum_{x' \in \operatorname{supp}(g(X))} x' \mathbb{P}\left(\{\omega : g(X(\omega)) = x'\}\right) \\
&= \sum_{x' \in \operatorname{supp}(g(X))} x' \sum_{\omega : g(X(\omega)) = x'} \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) \\
&= \sum_{x' \in \operatorname{supp}(g(X))} \sum_{\omega : g(X(\omega)) = x'} g(X(\omega)) \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega)) \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)
\end{aligned}$$

Доведення.

Продовження...

- Отже,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(X)\right] &= \sum_{\omega\in\Omega} g(X(\omega))\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) \\
&= \sum_{x\in\operatorname{supp}(X)} \sum_{\omega:X(\omega)=x} g(x)\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) \\
&= \sum_{x\in\operatorname{supp}(X)} g(x) \sum_{\omega:X(\omega)=x} \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) \\
&= \sum_{x\in\operatorname{supp}(X)} g(x)\mathbb{P}_X\left(X=x\right)
\end{aligned}$$

□

Простий приклад

Приклад (КЛ4.3.7)

- Нехай X — випадкова величина з функцією ймовірности

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.2\,, & x = -1 \\ 0.5\,, & x = 0 \\ 0.3\,, & x = 1 \end{cases}$$

- Тоді

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} x^2 p_X(x) = (-1)^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.3 = 0.5$$

- До того ж

$$0.5 = \mathbb{E}\left[X^2\right] \neq (\mathbb{E}[X])^2 = (0.1)^2 = 0.01$$

□

Сподівання недостатньо

- Сподівання дає змогу описати розподіл одним числом
- Проте цього **явно** недостатньо
- Нехай випадкові величини X і Y мають функції ймовірности

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{8}, x = -1 \\ \frac{1}{8}, x = 1 \\ \frac{2}{8}, x = 2 \end{cases}, \qquad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{8}, y = -10 \\ \frac{1}{8}, y = 10 \\ \frac{2}{8}, y = 20 \end{cases}$$

- Вони мають **однакове** сподівання,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$$

- Очевидно, розподіли **суттєво** різняться

Дисперсія

Визначення (КЛ4.3.8)

- **Дисперсією** (variance) випадкової величини X є

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \cdot \mathbb{P}_X(X = x) \qquad \text{(КЛ4.3.4)}$$

- **Середньоквадратичним відхиленням** (standard deviation) випадкової величини X є

$$\operatorname{sd}(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \cdot \mathbb{P}_X(X = x)} \qquad \text{(КЛ4.3.5)}$$

□

- Часто $\operatorname{Var}(X)$ позначають через σ_X^2, і тоді $\operatorname{sd}(X)$ має позначення σ_X
- Дисперсія показує, наскільки **далеко (в середньому)** стоять від $\mathbb{E}[X]$ значення величини X
- Тобто **наскільки сильно** значення величини X **розкидано** відносно $\mathbb{E}[X]$
- Одиниці виміру $\operatorname{Var}(X)$ є **квадратами** від одиниць виміру X, тому застосовують $\operatorname{sd}(X)$

Чому квадрати?

Зауваження (КЛ4.3.9)

- Нам потрібні **відхилення** від сподівання
- Взяти **просто різницю** неможливо:

$$\mathbb{E}\left[X - \mathbb{E}\left[X\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\right] - \mathbb{E}\left[X\right] = 0$$

- Додатні і від'ємні відстані **компенсують** одне одного
- Квадрати перетворюють усі відстані в додатні
- Альтернатива — $\mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}\left[X\right]|\right]$
- Модуль недиференційовний у нулі

$\square$

Спрощена формула дисперсії

Твердження (КЛ4.3.10)

Для будь-якої випадкової величини X

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2 \tag{КЛ4.3.6}$$

Доведення.

За визначенням дисперсії (КЛ4.3.4),

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2
\end{aligned}$$

$\square$

Простий приклад

- Дисперсія **не є лінійною**:

$$\mathrm{Var}\,(aX+b) = \mathbb{E}\left[(aX+b-\mathbb{E}\,[aX+b])^2\right] = \mathbb{E}\left[a^2(X-\mathbb{E}\,[X])^2\right] = a^2\mathrm{Var}\,(X)$$

Приклад (КЛ4.3.11)

- Нехай маємо правильну гральну кісточку
- Нехай $X =$«число, яке випало»
- Розгляньмо числові характеристики цієї випадкової величини:

$$\mathbb{E}\,[X] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}\,[X])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$\mathrm{sd}\,(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71$$

□

Цікава властивість

- Оскільки дисперсія невід'ємна, маємо
$$0 \le \mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}\,[X])^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[X^2\right] \ge (\mathbb{E}\,[X])^2$$

Приклад (КЛ4.3.12)

- Покладімо, що люди народжуються в кожний i-ий день року, $i = 1, 2, \ldots, 365$, **незалежно** один від одного **з імовірністю** p_i, $\sum_{i=1}^{365} p_i = 1$
- $A_{s,t}$ =«особи s і t народилися в один день»
- Чому дорівнює ймовірність $\mathbb{P}\,(A_{1,2})$?
- Нехай B_i =«особи 1 і 2 народилися в день i»
- Через незалежність $\mathbb{P}\,(B_i) = p_i \cdot p_i = p_i^2$
- $A_{1,2}$ є об'єднанням B_i, $i = 1, \ldots, 365$:
$$\mathbb{P}\,(A_{1,2}) = \sum_{i=1}^{365} p_i^2$$

□

Приклад (КЛ4.3.12)

Продовження...

- Підрахуймо тепер імовірність $\mathbb{P}(A_{1,2} \mid A_{1,3})$
- Нехай C_i =«особи 1, 2 і 3 народилися в день i»
- Через незалежність $\mathbb{P}(C_i) = p_i^3$
- Оскільки $A_{1,2} \cap A_{1,3}$ є об'єднанням C_i, $i = 1, \dots, 365$, маємо:

$$\mathbb{P}(A_{1,2} \mid A_{1,3}) = \frac{\mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3})}{\mathbb{P}(A_{1,3})} = \frac{\mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3})}{\mathbb{P}(A_{1,2})} = \frac{\sum_{i=1}^{365} p_i^3}{\sum_{i=1}^{365} p_i^2}$$

- Розгляньмо випадкову величину X, яка дорівнює p_i з імовірністю p_i:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{365} p_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{365} p_i^2, \qquad \mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=1}^{365} p_i \cdot p_i^2 = \sum_{i=1}^{365} p_i^3$$

- Маємо:

$$\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{365} p_i^3 \geq \left(\sum_{i=1}^{365} p_i^2\right)^2 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A_{1,2} \mid A_{1,3}) \geq \mathbb{P}(A_{1,2})$$

- Імовірність народитися в один і той самий день, **за умови**, що в цей самий день народилися дві особи, більше чи дорівнює **безумовній** імовірності

План лекції

1. Сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини
2. Дискретний рівномірний розподіл
3. Схема Бернуллі

Визначення рівномірного розподілу

Визначення (КЛ4.4.1)

- Випадкова величина X зі скінченним носієм має **рівномірний розподіл** (uniform distribution), якщо

$$p_X(x) = \frac{1}{|\operatorname{supp}(X)|} \tag{КЛ4.4.1}$$

- Позначаємо це через $X \sim \mathrm{U}(\operatorname{supp}(X))$

□

- Відповідна функція ймовірности задовольняє обидві властивості
- Вона невід'ємна
- Сума її значень по всіх елементах носія дорівнює 1:

$$\sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} \frac{1}{|\operatorname{supp}(X)|} = \frac{|\operatorname{supp}(X)|}{|\operatorname{supp}(X)|} = 1$$

Приклад застосування рівномірного розподілу

Приклад (КЛ4.4.2)

- Нехай у капелюсі містяться 100 пронумерованих від 1 до 100 шматочків паперу
- Послідовно **і незалежно** витягають 5 шматочків
- Нехай X_j =«номер на j-му витягнутому шматочку», $j = 1, \ldots, 5$
- За побудовою $X_j \sim \mathrm{U}\left(\{1, \ldots, 100\}\right)$, $j = 1, \ldots, 5$
- Це справедливо **незалежно** від того, **із повтореннями** чи **без них** роблять вибір:
  - Нехай замість п'яти послідовних витягів відбувається один **одночасний**
  - 5 людей **одночасно** витягують по шматочку
  - Очевидно, кожен може витягнути 1 зі 100
- Імовірність події «шматочок із номером 100 витягнуто принаймні один раз» дорівнює

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X\left(X_1 = 100 \cup \ldots \cup X_5 = 100\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 \neq 100 \cap \ldots \cap X_5 \neq 100\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 \neq 100\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_5 \neq 100\right) \\
&= 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left(X_1 = 100\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \mathbb{P}\left(X_5 = 100\right)\right) \\
&= 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^5 \approx 0.049
\end{aligned}$$

□

План лекції

1 Сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини

2 Дискретний рівномірний розподіл

3 Схема Бернуллі

Випробування Бернуллі

- Розгляньмо найпростіший дискретний розподіл
- Нехай деякий експеримент може завершитися:
  - Успіхом з імовірністю $p \in [0; 1]$
  - Невдачею з імовірністю $q \equiv 1 - p$
- Такий експеримент називають **випробуванням Бернуллі** (Bernoulli trial)
- Розгляньмо випадкову величину X:
  - $X = 1$, якщо був успіх
  - $X = 0$, якщо була невдача

Визначення (КЛ4.5.1)

- Випадкова величина X має **розподіл Бернуллі** (Bernoulli distribution) із параметром p, якщо її функція ймовірности має вид:

$$p_X(1) = p \,, \qquad p_X(0) = 1 - p$$

- Або

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \,, \quad x \in \{0, 1\} \tag{КЛ4.5.1}$$

- І справді:

$$p_X(0) = p^0 (1-p)^{1-0} = (1-p) \,, \quad p_X(1) = p^1 (1-p)^{1-1} = p$$

- Позначаємо це через $X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$

□

Твердження (КЛ4.5.3)

Якщо $X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$, то $\mathbb{E}\,[X] = p$, а $\mathrm{Var}\,(X) = p(1-p)$

Доведення.

- Величина Бернуллі має два значення, 1 і 0, із імовірностями p і $1-p$:

$$\mathbb{E}\,[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

- Сподівання квадрату аналогічне:

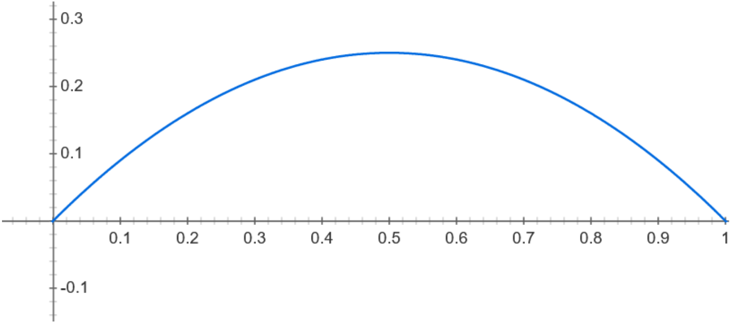
$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$$

- Тоді дисперсія за (КЛ4.3.4) дорівнює

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}\,[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$\square$

- $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$ досягає свого максимуму за $p = 0.5$
- Отже **найбільша невизначеність** спостерігається для величини Бернуллі з параметром $p = 0.5$
- **Найменша** — з параметрами $p = 0$, $p = 1$: дисперсія взагалі нульова



Визначення (КЛ4.5.4)

- Розгляньмо набір із n **послідовних** і **незалежних** випробувань Бернуллі
- Нехай імовірність успіху в кожному дорівнює p
- Такий набір має назву **схеми Бернуллі** (Bernoulli scheme)
- Випадкова величина $X =$«загальне число успіхів» має **біномний розподіл** (Binomial distribution) із параметрами n і p
- Позначаємо це через $X \sim \operatorname{Binom}(n, p)$

□

Біномна функція ймовірности

Твердження (КЛ4.5.5)

Якщо $X \sim \mathrm{Binom}\,(n, p)$, то

$$\mathbb{P}_X\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{КЛ4.5.2}$$

Доведення.

- Потрібно зрозуміти, на якому ймовірнісному просторі визначено X
- $\Omega = \{0, 1\}^n$, тобто це простір **векторів** довжини n із нулів (невдач) і одиниць (успіхів)
- Як завжди для дискретних просторів, σ-алгеброю є 2^Ω
- Імовірність кожної елементарної події $\omega \in \Omega$:
  - Випробування незалежні
  - Якщо ω містить точно k одиниць і $n-k$ нулів, $\mathbb{P}\,(\{\omega\}) = p^k (1-p)^{n-k}$
  - Послідовність 0 і 1 не важлива, головне кількість
- Усього є $\binom{n}{k}$ елементарних подій, у яких міститься точно k успіхів (вибір без повторень і без збереження порядку)

Біномна функція ймовірности

Доведення.

Продовження...

- За визначенням (КЛ4.1.1) маємо:

$$\mathbb{P}_X(X=k) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)=k\}) = \sum_{\omega : X(\omega)=k} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$$= \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}(\{\omega_{k,i}\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Чи є це функцією ймовірности?
- Вона **невід'ємна**, тому треба показати, що сума ймовірностей **дорівнює 1**
- Це випливає з біномної теореми:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- У нас $a = p$, $b = 1-p$:

$$1^n = 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \square$$

Приклади біномних розподілів

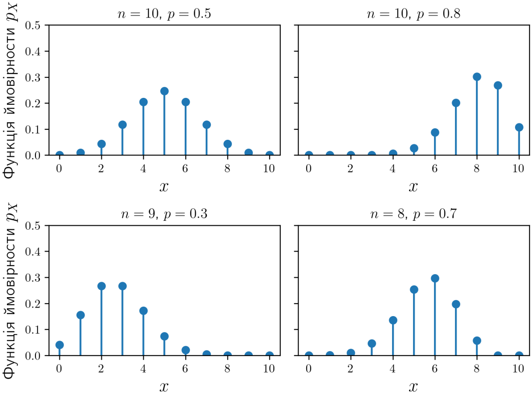


Рис. КЛ4.5.1

- Коли $p \neq \frac{1}{2}$, розподіл не є симетричним відносно середнього значення
- Що **більші** значення p для одного й того ж n, то ймовірніші **великі** значення X
- Більше прикладів **тут**

Класичний приклад

Приклад (КЛ4.5.7)

- Нехай підкидають 5 монеток з імовірністю випаду герба p
- Нехай X =«число випалих гербів»
- За побудовою $X \sim \mathrm{Binom}(5, p)$
- Зокрема,

$$\mathbb{P}_X(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$$

- А, скажімо,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(X \geq 4) &= \mathbb{P}_X(X = 4) + \mathbb{P}_X(X = 5) \\ &= \binom{5}{4} p^4 (1-p)^1 + \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0 \\ &= 5p^4(1-p) + p^5\end{aligned}$$

$\square$

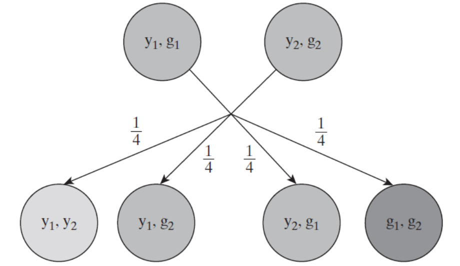
Приклад (КЛ4.5.8)

- Фенотипну рису визначає пара генів — **домінантний** і **рецесивний**
- Розгляньмо приклад кольору насіння — домінантний жовтий y і рецесивний зелений g
- Особини з парами генів yy, yg та gy мають **домінантний** фенотип, а особини з парою генів gg — **рецесивний**
- Нащадок успадковує **по одному гену** від **кожного** з батьків з **однаковою** ймовірністю
- Нехай пара батьків із гібридними генами має 4 нащадків
- Чому дорівнює ймовірність, що 3 них матимуть домінантний фенотип?

$\square$

Приклад (КЛ4.5.8)

Продовження...



- Імовірність, що нащадок домінантний, є $p = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$
- Усього нащадків $n = 4$
- Тоді $X =$«число нащадків із домінантним фенотипом» $\sim \text{Binom}\,(4, 3/4)$
- Відтак

$$\mathbb{P}_X\,(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$\square$

Зауваження (КЛ4.5.6)

$X \sim \mathrm{Bern}\,(p)$ і $Y \sim \mathrm{Binom}\,(1, p)$ мають однаковий розподіл □

Твердження (КЛ4.5.9)

- Нехай $X \sim \mathrm{Binom}\,(n, p)$
- Тоді $Y = n - X \sim \mathrm{Binom}\,(n, 1 - p)$

Доведення.

Для кожного $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_Y\,(Y = k) = \mathbb{P}\,(\{\omega : Y(\omega) = k\}) = \mathbb{P}\,(\{\omega : X(\omega) = n - k\}) = \mathbb{P}_X\,(X = n - k) \\ = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k \\ = \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k}\end{aligned}$$

□

Сподівання і дисперсія біноміного розподілу

Твердження (КЛ4.5.10)

Якщо $X \sim \mathrm{Binom}\,(n, p)$, то $\mathbb{E}\,[X] = np$, а $\mathrm{Var}\,(X) = np(1-p)$

Доведення.

- За визначенням сподівання та з урахуванням (КЛ4.5.2) маємо:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-j-1} \\
&= np \cdot 1 = np
\end{aligned}
$$

Сподівання та дисперсія біноміного розподілу

Доведення.

Продовження...

- Для обчислення дисперсії спочатку обчислімо $\mathbb{E}\left[X^2\right]$
- Розпишімо його так:

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[X(X-1)\right] = np + \mathbb{E}\left[X(X-1)\right]$$

- Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(X-1)\right] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Доведення.

Продовження...

- Далі:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(X-1)\right] &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}\\
&= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{j!((n-2)-j)!}p^j(1-p)^{n-2-j}\\
&= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j(1-p)^{n-2-j}\\
&= n(n-1)p^2\cdot 1 = n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

- Нарешті,

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}\left[X\right])^2 = (np + n(n-1)p^2) - (np)^2 = np(1-p) \qquad \square$$

Хитрощі з доведенням

Зауваження (КЛ4.5.11)

- Прийом, використаний у доведенні Твердження КЛ4.5.10, є **дуже поширеним**
- Ми часто намагаємося «помітити», що деякі вирази можна звести до суми значень функції ймовірности деякого розподілу
- Сума значень функції ймовірности **будь-якого** розподілу дорівнює 1
- Тому можна замінити складні вирази на 1

$\square$

Приклад на сподівання

Приклад (КЛ4.5.12)

- Продовжмо розгляд Прикладу КЛ4.5.8 про фенотипи
- Число нащадків із домінантним фенотипом $X \sim \mathrm{Binom}\,(4, 3/4)$
- Згідно з Твердженням КЛ4.5.10,

$$\mathbb{E}\,[X] = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3\,, \quad \mathrm{Var}\,(X) = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

- **У середньому** варто сподіватися на 3 нащадків із домінантним фенотипом
- Середнє відхилення від цього сподівання буде $\mathrm{sd}\,(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0.87$

$\square$