



# ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ – 3017

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

|                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Рівень вищої освіти                               | Перший (бакалаврський)                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Галузь знань                                      | 11 математика і статистика                                                                                                                                                                                                                                                |
| Спеціальність                                     | 113 прикладна математика                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Освітня програма                                  | Наука про дані та математичне моделювання                                                                                                                                                                                                                                 |
| Статус дисципліни                                 | Нормативна                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Форма навчання                                    | очна(денна)                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Рік підготовки, семестр                           | 3 курс, осінній семестр                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Обсяг дисципліни                                  | 4 кредити/120 год. (36 год.-лекції, 18 год.-практичні заняття, СРС 66 год.)                                                                                                                                                                                               |
| Семестровий контроль/<br>контрольні заходи        | екзамен / МКР, поточний контроль                                                                                                                                                                                                                                          |
| Розклад занять                                    | <a href="https://schedule.kpi.ua/">https://schedule.kpi.ua/</a>                                                                                                                                                                                                           |
| Мова викладання                                   | Українська                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Інформація про<br>керівника курсу /<br>викладачів | Лектор: доктор фіз.-мат. наук, професор, Лось Валерій Миколайович,<br><a href="mailto:v_los@yahoo.com">v_los@yahoo.com</a><br>Практичні / Семінарські: доктор фіз.-мат. наук, професор, Лось Валерій<br>Миколайович, <a href="mailto:v_los@yahoo.com">v_los@yahoo.com</a> |
| Розміщення курсу                                  | Slack                                                                                                                                                                                                                                                                     |

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Функціональний аналіз є одним із центральних розділів сучасної математики. Він переважно вивчає нескінченномірні простори і оператори в них. Поняття та методи функціонального аналізу дозволяють на строгому математичному рівні формувати постановки як класичних, так і сучасних математичних задач та будувати їх розв'язки. Функціональний аналіз знаходить свої застосування в таких суміжних областях, як диференціальні та інтегральні рівняння, рівняння математичної фізики, обчислювальна математика, теорія ймовірностей тощо.

Предметом дисципліни є властивості метричних, лінійних нормованих, гільбертових просторів та лінійних операторів в них.

#### Мета та завдання кредитного модуля

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів таких

знань:

- ~ основних понять теорії метричних і лінійних нормованих просторів;
- ~ базових понять теорії лінійних операторів;
- ~ зв'язків між основними поняттями в цих теоріях;
- ~ формулювань теорем теорії та наслідків з них;

та умінь:

- ~ застосовувати отримані знання до розв'язання конкретних задач з теорії нескінченномірних лінійних просторів та лінійних операторів в них;
- ~ використовувати методи функціонального аналізу в теоретичних і прикладних дослідженнях;

самостійно працювати з підручниками, довідковою літературою, інтернет-ресурсами.

Основні завдання навчальної дисципліни.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти набудуть такі **компетентності**:

- ЗК1 здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями,
- ЗК3 здатність генерувати нові ідеї (креативність),
- ЗК4 здатність бути критичним і самокритичним,
- ЗК6 здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу,
- ЗК8 знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності,
- ФК1 здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем,
- ФК2 здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі,
- ФК14 здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібну точність і надійність результату.

**Програмними результатами навчання є:**

- РН1 демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці;
- РН2 володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей;
- РН15 уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу.

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

дисципліні «Функціональний аналіз» передують дисципліни «Математичний аналіз», «Алгебра та геометрія», «Теорія функцій комплексної змінної» навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика;

дисципліна «Функціональний аналіз» забезпечує вивчення дисципліни «Математичне моделювання» плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика.

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Метричні простори і їх відображення.**

Тема 1.1. Метричні простори. Метрика. Збіжність в метричному просторі. Відкриті множини. Замкнені множини і замикання. Сепарабельні метричні простори. Повні метричні простори. Поповнення метричного простору.

Тема 1.2. Відображення метричних просторів. Неперервні відображення. Рівномірна неперервність. Принцип стискаючих відображень та його узагальнення. Компактні множини і їх властивості. Критерії компактності. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості. Теорема Арцела-Асколі.

### **Розділ 2. Лінійні нормовані і гільбертові простори.**

Тема 2.1. Лінійні нормовані простори. Лінійні простори. Базис Гамеля. Вимірність простору. Приклади. Норма на лінійному просторі. Банахові простори. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори.

Тема 2.2. Гільбертові простори. Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами. Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне

доповнення. Опуклі множини. Теореми про метричну і ортогональну проекцію. Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля. Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.

### **Розділ 3. Лінійні функціонали, оператори і спряжений простір.**

Тема 3.1. Неперервні лінійні функціонали. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу. Норма лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів.

Тема 3.2. Спряжений простір. Простір лінійних функціоналів і його повнота. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі і просторі  $C[a,b]$ . Продовження лінійного функціоналу за неперервністю. Теорема Гана-Банаха та її наслідки. Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей.

Тема 3.3 Обмежені лінійні оператори. Неперервність лінійного оператора в точці на всьому просторі. Обмеженість і неперервність лінійного оператора. Норма лінійного оператора. Простір лінійних обмежених операторів. Умови його повноти. Обернений оператор. Спектр і резольвента лінійного оператора.

## **4. Навчальні матеріали та ресурси**

### **Базова література**

1. Березанський Ю. М. Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. – Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2014. – 559 с.
2. Богданський Ю. В. та ін. Функціональний аналіз. Збірник вправ з функціонального аналізу. – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 67 с.  
[https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/27816/1/FA\\_zbirnyk\\_vprav.pdf](https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/27816/1/FA_zbirnyk_vprav.pdf)
3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. – Київ: Либідь, 1994. Т2. – 304 с.

### **Допоміжна література**

1. Городецький В. В., Нагнибида Н. И., Настасієв П. П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. – Київ : «Вища школа», 1990. – 479с.
2. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ : «Вища школа», 1974. – 456 с.

## **Навчальний контент**

### **5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)**

#### *Лекційні заняття*

| № з/п | Назва теми лекції та перелік основних питань                                                                                               |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | Означення метричного простору. Нерівності Гельдера та Мінковського. Основні приклади метричних просторів. Збіжність в метричних просторах. |
| 2     | Відкриті та замкнені кулі. Відкриті множини. Замкнені множини. Замикання.                                                                  |

| №<br>з/п | Назва теми лекції та перелік основних питань                                                                                                                                                   |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          | Сепарабельні метричні простори.                                                                                                                                                                |
| 3        | Повнота метричних просторів. Приклади повних та неповних метричних просторів. Теорема про поповнення метричного простору.                                                                      |
| 4        | Компактні простори. Покриття множини. Секвенціальна компактність. Властивості компактних множин. Приклади. Критерії компактності Кантора та Хаусдорфа. Критерій компактності в $R_n$ .         |
| 5        | Неперервні відображення метричних просторів. Рівномірна неперервність. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості. Теорема Арцела.                                            |
| 6        | Принцип стискаючих відображень та його застосування. Стискаюче відображення. Нерухома точка. Теорема Банаха. Застосування.                                                                     |
| 7        | Лінійні простори. Базис Гамеля. Вимірність простору. Приклади. Норма на лінійному просторі.                                                                                                    |
| 8        | Банахові простори. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори.                                                                           |
| 9        | Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами.                          |
| 10       | Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне доповнення. Теорема про ортогональну проекцію.                                                                                             |
| 11       | Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля.                                                                   |
| 12       | Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.                                                                                                                         |
| 13       | Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу.                                                                     |
| 14       | Норма лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів.                                                                                                                       |
| 15       | Простір лінійних функціоналів і його повнота. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі (теорема Рісса). Продовження лінійного функціоналу за неперервністю. |

| № з/п | Назва теми лекції та перелік основних питань                                                                                                                                                         |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 16    | Теорема Гана-Банаха та її наслідки. Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей.                                                                                  |
| 17    | Неперервність лінійного оператора в точці на всьому просторі. Обмеженість і неперервність лінійного оператора. Норма лінійного оператора. Простір лінійних обмежених операторів. Умови його повноти. |
| 18.   | Обернений оператор. Спектр і резольвента лінійного оператора.                                                                                                                                        |

### Практичні заняття

| № з/п | Назва теми заняття та перелік основних питань                                                                                                                                                              |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | Приклади метричних просторів. Збіжність в конкретних просторах функцій і послідовностей. Відкриті множини і їх властивості. Замкнені множини і їх властивості. Замикання множини.                          |
| 2     | Приклади повних і неповних метричних просторів. Теорема про поповнення. Оператор стиску. Теорема Банаха, застосування.                                                                                     |
| 3     | Означення і властивості компактних множин. Відносно компактні і передкомпактні множини. Властивості неперервних відображень компактних множин.                                                             |
| 4     | Лінійні простори. Скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори. Приклади норм на скінченновимірних і нескінченновимірних просторах. Основні лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. |
| 5     | Скалярний добуток послідовностей і функцій. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Гільбертові простори функцій і послідовностей. Метрика і ортогональна проекція.            |
| 6     | Ортонормовані системи. Теорема про ортогоналізацію. Нерівність Бесселя і рівність Парсеваля. Ортонормовані базиси в просторах $L_2$ і $l_2$ .                                                              |
| 7     | Неперервність функціоналу в окремій точці і на просторі. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Норма лінійного функціоналу.                                                                   |
| 8     | Приклади лінійних операторів. Дослідження їх обмеженості. Знаходження норми операторів.                                                                                                                    |
| 9     | Обернений оператор. Спектр і резольвента лінійного оператора.                                                                                                                                              |

## 6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студента полягає:

- підготовка до лекційних та практичних занять – систематично до 2 год. на заняття,
- підготовка до модульних контрольних робіт - до 5 год на роботу,
- підготовка до колоквіуму - до 5 год.
- підготовка до екзамену - до 20 год.

## Політика та контроль

### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

1. Систематичне відвідування лекційних і практичних занять.
2. Перескладання (переписування) модульної контрольної роботи не передбачене.
3. У випадку дистанційного навчання і недостатньої кількості балів (менше 60) в кінці семестру може бути дано додаткові завдання, щоб добрати бали до 60.

### 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Рейтинг студента з кредитного модуля складається з:

- 1) балів за виконання модульної контрольної роботи;
- 2) балів за активність на практичних заняттях
- 3) балів за відповідь на екзамені (очна форма навчання) або на колоквіумі (дистанційна форма навчання)

## СИСТЕМА РЕЙТИНГОВИХ БАЛІВ

### 1. Бали за модульну контрольну роботу

Модульна контрольна робота поділяється на дві 45-хвилинні контрольні роботи, що проводяться у вигляді тестів. Завдання на тестові контрольні роботи містять по 10 типових практичних прикладів.

Кількість балів за розв'язання кожного прикладу: 1,5 бали.

*Критерії оцінювання:*

*1,5 – правильна відповідь;*

*0 – неправильна відповідь;*

Викладач має право після завершення тесту вибірково запросити фотокопії студентських робіт та поставити нуль балів за завдання, розв'язання яких буде відсутнє чи неправильне.

**Максимальна кількість балів за модульний контроль:**

$1,5 \text{ бали} \times 10 \text{ завд.} \times 2 \text{ тест. контр. роб.} = \mathbf{30 \text{ балів.}}$

### 2. Бали за активність на практичних заняттях

Бали нараховуються за плідну роботу та відповіді на практичних заняттях. Але не більше ніж **10 балів** протягом усього семестру.

1 бал --- самостійно правильно розв'язане завдання і прокоментоване розв'язання

0.5 бала --- плідна робота на практичному занятті (ці бали нараховуються, якщо студент виконав усі практичні завдання, які розв'язувалися на практичному занятті)

0 балів --- пасивна робота на практичному занятті

### 3. Бали за відповідь на колоквіумі (дистанційна форма навчання)

Колоквіум відбувається у формі усної співбесіди викладача із студентом з використанням засобів онлайн зв'язку (Zoom, Skype тощо). Викладач задає студенту поступово декілька питань, на які студент відразу повинен надавати свою відповідь. Питання викладача можуть бути як продовженням опитування за попереднім питанням, так і бути на іншу тему.

За відповідь на кожне питання студент отримує певну кількість балів. Питання, в залежності від їх складності можуть вартувати від 1 до 5 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на колоквіумі дорівнює **10 балів**.

Під час відповіді на питання колоквіуму максимальну кількість балів студент отримує у випадку, якщо він надав повні та правильні відповіді на всі запитання викладача або припустився незначних похибок, які не вплинули на саму відповідь.

Нуль балів студент отримує у випадку, коли відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки. Якщо відповідь частково правильна, то студент за неї отримує, як правило, кількість балів, вдвічі меншу за максимально можливу за відповідне запитання.

### 4. Бали за відповідь на екзамені (очна форма навчання)

Екзаменаційний білет складається з 4 питань – 2 теоретичних та 2 практичних.

Відповідь на кожне теоретичне та практичне запитання оцінюється в 15 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на екзамені: 15 балів × 4 запитання = **60 балів**.

За відповідь на кожне запитання білету студент отримує:

- 12-15 балів, якщо він надав повну та правильну відповідь або припустився незначних похибок, які істотно не вплинули на саму відповідь,
- 8-11 балів, якщо відповідь правильна лише частково або не є повною (наприклад, наведена лише схема необхідного доведення теореми або під час розв'язання прикладу не перевірена можливість застосування відповідного методу),
- 4-7 балів, якщо відповідь частково правильна, але містить значні прогалини (наприклад, відсутнє необхідне доведення теореми чи під час розв'язання прикладу враховані не всі можливі випадки),
- 0-3 бали, якщо відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки.

### 5. Розрахунок шкали (R) рейтингу у випадку дистанційного навчання

Семестрова складова рейтингової шкали  $R_C = 50$  балів, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання модульної контрольної роботи, активність на практичних заняттях та відповідь на колоквіумі.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = 60 + 40 * (R_{\max} - R_{\text{доп}}) / (R_C - R_{\text{доп}}) = 100 \text{ балів},$$

тут  $R_{\max} = 50$  – максимальний можливий семестровий рейтинг студента,

$R_{\text{доп}} = 25$  – мінімальна кількість балів, необхідна для допуску.

### 6. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки у випадку дистанційного навчання

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента ( $R_{\text{СТ}}$ ) не менше 50 % від  $R_C$ , тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента  $R_D$  визначається за формулою

$$R_D = 60 + 40 * (R_{\text{СТ}} - R_{\text{доп}}) / (R_C - R_{\text{доп}}) = 20 + 1,6 * R_{\text{СТ}}.$$

### 7. Розрахунок шкали (R) рейтингу у випадку очного навчання

Семестрова складова рейтингової шкали  $R_C = 40$  балів, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання модульної контрольної роботи та активність на практичних заняттях.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = R_C + R_E = 100 \text{ балів,}$$

тут  $R_E = 60$  – максимальна можлива кількість балів, отримана на екзамені.

#### 8. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки у випадку очного навчання

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента ( $R_{CT}$ ) не менше 63 % від  $R_C$ , тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента  $R_D$  визначається за формулою

$$R_D = R_{CT} + R_{STE}. \quad (R_{STE} - \text{бали, набрані студентом на екзамені})$$

Оцінка виставляється відповідно до значення  $R_D$ :

| Сумарний рейтинг $R_D$ | Оцінка       |
|------------------------|--------------|
| 95-100                 | Відмінно     |
| 85-94                  | Дуже добре   |
| 75-84                  | Добре        |
| 65-74                  | Задовільно   |
| 60-64                  | Достатньо    |
| $25 \leq R_D \leq 59$  | Незадовільно |
| $R_{CT} < 25$          | Не допущений |

#### 9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

**Перелік теоретичних питань, що виносяться на іспит:**

1. Нерівності Гельдера та Мінковського.
2. Означення метричного простору. Приклади метричних просторів. Збіжність в метричних просторах.
3. Відкриті та замкнені кулі. Відкриті множини. Замкнені множини. Замикання. Сепарабельні метричні простори.
4. Повнота метричних просторів. Приклади повних та неповних метричних просторів. Теорема про поповнення метричного простору.
5. Покриття множини. Секвенціальна компактність. Властивості компактних множин. Приклади. Критерії компактності Кантора та Хаусдорфа. Критерій компактності в  $R_n$ .
6. Неперервні відображення метричних просторів. Рівномірна неперервність. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості. Теорема Арцела.
7. Стискаюче відображення. Нерухома точка. Теорема Банаха.
8. Застосування теореми Банаха.
9. Лінійні простори. Базис Гамеля. Вимірність простору. Приклади. Норми на лінійному просторі.
10. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори. Банахові простори.

11. Евклідові простори. Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами.
12. Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне доповнення. Теорема про ортогональну проекцію.
13. Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси.
14. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля.
15. Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.
16. Лінійний функціонал. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу.
17. Норма лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів.
18. Простір лінійних неперервних функціоналів і його повнота.
19. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі (теорема Рісса).
20. Продовження лінійного функціоналу за неперервністю.
21. Теорема Гана-Банаха та її наслідки. Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей.
22. Лінійний оператор. Неперервність лінійного оператора в точці на всьому просторі. Обмеженість і неперервність лінійного оператора.
23. Норма лінійного оператора. Простір лінійних обмежених операторів. Умови його повноти.
24. Обернений оператор. Теорема Банаха.
25. Спектр і резольвента лінійного оператора.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено** проф, д.ф.-м.н., проф. Лось Валерій Миколайович.

**Ухвалено** кафедрою прикладної математики (протокол № 14 від 14.05.2025)

**Погоджено** Методичною комісією факультету (протокол № 11 від 23.05.2025)