



ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	11 математика і статистика
Спеціальність	113 прикладна математика
Освітня програма	Наука про дані та математичне моделювання
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	очна(денна)
Рік підготовки, семестр	3 курс, весняний семестр
Обсяг дисципліни	4 кредити/120 год. (36 год.-лекції, 18 год.-практичні заняття, СРС 66 год.)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	залік / МКР, поточний контроль
Розклад занять	https://schedule.kpi.ua/
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: доктор фіз.-мат. наук, професор, Лось Валерій Миколайович, v_los@yahoo.com Практичні / Семінарські: доктор фіз.-мат. наук, професор, Лось Валерій Миколайович, v_los@yahoo.com
Розміщення курсу	Slack

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Функціональний аналіз є одним із центральних розділів сучасної математики. Він переважно вивчає нескінченномірні простори і оператори в них. Поняття та методи функціонального аналізу дозволяють на строгому математичному рівні формувати постановки як класичних, так і сучасних математичних задач та будувати їх розв'язки. Функціональний аналіз знаходить свої застосування в таких суміжних областях, як диференціальні та інтегральні рівняння, рівняння математичної фізики, обчислювальна математика, теорія ймовірностей тощо.

Предметом дисципліни є властивості метричних, лінійних нормованих, гільбертових просторів та лінійних операторів в них.

Мета та завдання кредитного модуля

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів таких знань:

- основних понять теорії метричних і лінійних нормованих просторів;
- базових понять теорії лінійних операторів;
- зв'язків між основними поняттями в цих теоріях;
- формулювань теорем теорії та наслідків з них;

та умінь:

- застосовувати отримані знання до розв'язання конкретних задач з теорії нескінченномірних лінійних просторів та лінійних операторів в них;

- використовувати методи функціонального аналізу в теоретичних і прикладних дослідженнях;
- самостійно працювати з підручниками, довідковою літературою, інтернет-ресурсами.

Основні завдання навчальної дисципліни.

Підсилення та деталізація компетентностей:

- ЗК1 здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями,
- ЗК3 здатність генерувати нові ідеї (креативність),
- ЗК4 здатність бути критичним і самокритичним,
- ЗК6 здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу,
- ЗК8 знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності,
- ФК1 здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем,
- ФК2 здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі,
- ФК14 здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.

Підсилення та деталізація програмних результатів навчання:

- РН1 демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці;
- РН2 володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей;
- РН15 уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

- дисципліні «Функціональний аналіз» передують дисципліни «Математичний аналіз» та «Алгебра та геометрія» навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 113 Прикладна математика;

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Метричні простори і їх відображення.

Тема 1.1. Метричні простори. Метрика. Збіжність в метричному просторі. Відкриті множини. Замкнені множини і замикання. Сепарабельні метричні простори. Повні метричні простори. Поповнення метричного простору.

Тема 1.2. Відображення метричних просторів. Неперервні відображення. Рівномірна неперервність. Принцип стискаючих відображень та його застосування. Компактні множини і їх властивості. Критерії компактності. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості.

Розділ 2. Лінійні нормовані і гільбертові простори.

Тема 2.1. Лінійні нормовані простори. Лінійні простори. Вимірність простору. Приклади. Норма на лінійному просторі. Банахові простори. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори.

Тема 2.2. Гільбертові простори. Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами. Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне

доповнення. Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля. Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.

Розділ 3. Лінійні функціонали і оператори.

Тема 3.1 Обмежені лінійні оператори. Неперервність лінійного оператора в точці на всьому просторі. Обмеженість і неперервність лінійного оператора. Норма лінійного оператора. Простір лінійних обмежених операторів. Умови його повноти. Обернений оператор. Спектр і резольвента лінійного оператора.

Тема 3.2. Неперервні лінійні функціонали. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу. Норма лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі (теорема Ріса).

Тема 3.3. Інтегральні рівняння Фредгольма. Метод послідовних наближень. Рівняння з виродженими ядрами.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Березанський Ю. М. Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. – Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2014. – 559 с.
2. Богданський Ю. В. та ін. Функціональний аналіз. Збірник вправ з функціонального аналізу. – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 67 с. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/27816/1/FA_zbirnyk_vprav.pdf
3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. – Київ: Либідь, 1994. Т2. – 304 с.

Допоміжна література

1. Городецький В. В., Нагнибида Н. И., Настасієв П. П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. – Київ : «Вища школа», 1990. – 479с.
2. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ : «Вища школа», 1974. – 456 с.

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Означення метричного простору. Нерівності Гельдера та Мінковського. Приклади метричних просторів. Збіжність в метричних просторах.
2	Відкриті та замкнені кулі. Відкриті множини. Замкнені множини. Замикання. Сепарабельні метричні простори.

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
3	Повнота метричних просторів. Приклади повних та неповних метричних просторів. Теорема про поповнення метричного простору.
4	Компактні простори. Покриття множини. Властивості компактних множин. Приклади. Критерії компактності Кантора та Хаусдорфа. Критерій компактності в R_n .
5	Неперервні відображення метричних просторів. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості.
6	Стискаюче відображення. Нерухома точка. Теорема Банаха.
7	Застосування принципу стискаючих відображень.
8	Лінійні простори. Вимірність простору. Приклади. Норма на лінійному просторі.
9	Банахові простори. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори. Наближення елемента нормованого простору елементом його скінченновимірного підпростору.
10	Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами.
11	Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне доповнення. Теорема про ортогональну проекцію.
12	Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля. Теорема про найкраще наближення.
13	Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.
14	Лінійний оператор в нормованому просторі. Неперервність лінійного оператора в точці і на всьому просторі. Обмеженість і неперервність лінійного оператора. Норма лінійного оператора. Лінійний функціонал як окремий випадок оператора.
15	Простір лінійних обмежених операторів. Умови його повноти. Рівномірною і сильною збіжністю операторів. Простір лінійних функціоналів і його повнота.

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
	Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі (теорема Ріса).
16	Добуток лінійних операторів. Обернений лінійний оператор. Теорема Банаха про обернений оператор. Спектр і резольвента лінійного неперервного оператора.
17	Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду.
18.	МКР

Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
1	Приклади метричних просторів. Збіжність в конкретних просторах функцій і послідовностей. Відкриті множини і їх властивості. Замкнені множини і їх властивості. Замикання множини.
2	Приклади повних і неповних метричних просторів. Теорема про поповнення. Оператор стиску. Теорема Банаха, застосування.
3	Означення і властивості компактних множин. Властивості неперервних відображень компактних множин.
4	Лінійні простори. Скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори. Приклади норм на скінченновимірних і нескінченновимірних просторах. Основні лінійні нормовані простори функцій і послідовностей.
5	Скалярний добуток послідовностей і функцій. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Гільбертові простори функцій і послідовностей. Метрика і ортогональна проекція.
6	Ортонормовані системи. Теорема про ортогоналізацію. Нерівність Бесселя і рівність Парсеваля. Ортонормовані базиси в просторах L_2 і l_2 .
7	Приклади лінійних функціоналів і операторів. Дослідження їх обмеженості. Знаходження норм операторів і функціоналів.
8	Обернений оператор. Спектр і резольвента лінійного оператора.
9	Інтегральні рівняння Фредгольма.

6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студента полягає:

- підготовка до лекційних та практичних занять – систематично до 2 год. на заняття,
- виконання домашньої роботи до 10 год.,
- підготовка до модульної контрольної роботи - до 5 год.,
- підготовка до колоквиуму - до 5 год.

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

1. Систематичне відвідування лекційних і практичних занять.
2. Перескладання (переписування) модульної контрольної роботи не передбачене.
3. У випадку недостатньої кількості балів (менше 60) в кінці семестру може бути дано додаткові завдання, щоб добрати бали до 60.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Рейтинг студента з кредитного модуля складається з:

- 1) балів за виконання домашньої роботи;
- 2) балів за виконання модульної контрольної роботи;
- 3) балів за активність на практичних заняттях
- 4) балів за відповідь на колоквіумі

СИСТЕМА РЕЙТИНГОВИХ БАЛІВ

1. Бали за домашню роботу

Домашня робота містить 10 практичних прикладів.

Кількість балів за розв'язання кожного прикладу: 1 бал.

Критерії оцінювання:

1 – правильне розв'язання;

0 – неправильне або відсутнє розв'язання;

Максимальна кількість балів за домашню роботу:

$1 \text{ бал} \times 10 \text{ завд.} = \mathbf{10 \text{ балів.}}$

2. Бали за модульну контрольну роботу

Модульна контрольна робота проводиться у вигляді теста. Завдання на тест містить 20 типових практичних прикладів.

Кількість балів за розв'язання кожного прикладу: 1 бал.

Критерії оцінювання:

1 – правильна відповідь;

0 – неправильна відповідь;

Викладач має право після завершення тесту вибірково запросити фотокопії студентських робіт та поставити нуль балів за завдання, розв'язання яких буде відсутнє чи неправильне.

Максимальна кількість балів за модульний контроль:

$1 \text{ бал} \times 20 \text{ завд.} = \mathbf{20 \text{ балів.}}$

3. Бали за активність на практичних заняттях

Бали нараховуються за плідну роботу та відповіді на практичних заняттях. Але не більше ніж **10 балів** протягом усього семестру.

1 бал --- самостійно правильно розв'язане завдання і прокоментоване розв'язання

0.5 бала --- плідна робота на практичному занятті (ці бали нараховуються, якщо студент виконав усі практичні завдання, які розв'язувалися на практичному занятті)

0 балів --- пасивна робота на практичному занятті

4. Бали за відповідь на колоквіумі

Колоквіум відбувається у формі усної співбесіди викладача із студентом (у випадку дистанційного навчання з використанням засобів онлайн зв'язку Zoom, Meet тощо). Викладач задає студенту поступово декілька питань, на які студент відразу повинен надавати свою відповідь. Питання викладача можуть бути як продовженням опитування за попереднім питанням, так і бути на іншу тему.

За відповідь на кожне питання студент отримує певну кількість балів. Питання, в залежності від їх складності можуть вартувати від 1 до 5 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на колоквіумі дорівнює **10 балів**.

Під час відповіді на питання колоквіуму максимальну кількість балів студент отримує у випадку, якщо він надав повні та правильні відповіді на всі запитання викладача або припустився незначних похибок, які не вплинули на саму відповідь.

Нуль балів студент отримує у випадку, коли відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки. Якщо відповідь частково правильна, то студент за неї отримує, як правило, кількість балів, вдвічі меншу за максимально можливу за відповідне запитання.

5. Розрахунок шкали (R) рейтингу

Семестрова складова рейтингової шкали $R_c = 50$ балів, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання домашньої роботи, модульної контрольної роботи, активність на практичних заняттях та відповіді на колоквіумі.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = 60 + 40 * (R_{\max} - R_{\text{доп}}) / (R_c - R_{\text{доп}}) = 100 \text{ балів},$$

тут $R_{\max} = 50$ – максимальний можливий семестровий рейтинг студента,

$R_{\text{доп}} = 25$ – мінімальна кількість балів, необхідна для допуску.

6. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента ($R_{\text{ст}}$) не менше 50 % від R_c , тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента R_d визначається за формулою

$$R_d = 60 + 40 * (R_{\text{ст}} - R_{\text{доп}}) / (R_c - R_{\text{доп}}) = 20 + 1,6 * R_{\text{ст}}.$$

Оцінка виставляється відповідно до значення R_d :

Сумарний рейтинг R_d	Оцінка
95-100	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
$25 \leq R_d \leq 59$	Незадовільно
$R_{\text{ст}} < 25$	Не допущений

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено проф, д.ф.-м.н., проф. Лось Валерій Миколайович.

Ухвалено кафедрою прикладної математики (протокол № 10 від 18.02.2026р.)

Погоджено Методичною комісією факультету (протокол № 7 від 23.02.2026р.)