Теорія ймовірностей:
Лекція 6
Незалежні події. Дискретні випадкові величини

Данило Тавров

19 вересня 2025 р.

План лекції

Що було минулого разу

- На минулій лекції ми розглянули поняття умовної ймовірности
- А саме: нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$, і $A, B \in \mathcal{A}$ — деякі події ($\mathbb{P}(B) > 0$)
- Тоді **умовна ймовірність** A за умови B (conditional probability of A given B):
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{КЛ3.1.1}$$
- $\mathbb{P}(A)$ — **апріорна ймовірність** (prior)
- $\mathbb{P}(A \mid B)$ — **апостеріорна ймовірність** (posterior)

Що було минулого разу

- Також ми показали, що з цього визначення випливає ланцюгове правило:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A \mid B)\ , \quad \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A)\ ,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1, A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_1 \mid A_2)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1, A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}) \\ &= \ldots \end{aligned} \tag{КЛ3.1.2}$$

- Це можна використовувати для розбиття складної задачі на простіші підзадачі
- Також вкрай важливою є теорема Беєса: нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$, і нехай $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) > 0$, тоді:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \tag{КЛ3.3.1}$$

- Теорема Беєса часто йде у зв'язці з законом повної ймовірности: нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$ і розбиття $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, тоді якщо $\mathbb{P}(A_i) > 0$ для всіх i, маємо

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i) \tag{КЛ3.3.2}$$

- Обумовлення можна здійснювати також декількома подіями
- Нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$, і нехай $A, B, C \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$
- Тоді

$$\mathbb{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A, C)\, \mathbb{P}(A \mid C)}{\mathbb{P}(B \mid C)} \tag{КЛ3.3.3}$$

- Також нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$ і деяке його розбиття $A_1, \ldots, A_n$, $\mathbb{P}(A_i \cap B) > 0$ для всіх i
- Тоді

$$\mathbb{P}(B \mid C) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \mid A_i, C)\, \mathbb{P}(A_i \mid C) \tag{КЛ3.3.4}$$

План лекції

Визначення незалежних подій

Теорія міри закінчується, а теорія ймовірности починаеться там, де з'являється визначення незалежности. (Р. Дарретт)

Визначення (КЛ3.4.1)

- Події A і B називають **незалежними** (independent)($A \perp\!\!\!\perp B$), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \tag{КЛ3.4.1}$$

- Якщо $\mathbb{P}(A) > 0$ і $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)\ , \qquad \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$$

□

- Обумовлення однієї події іншою в жодний спосіб не впливає на її ймовірність
- Звідси випливає **правило множення** для комбінаторних формул

Зауваження (КЛ3.4.2)

- **Незалежність** — це зовсім не те саме, що **несумісність**
- Якщо $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, то події були б незалежні, **тільки якщо** $\mathbb{P}(A) = 0$ чи $\mathbb{P}(B) = 0$
- Тобто якщо $\mathbb{P}(A) > 0$ і $\mathbb{P}(B) > 0$, то події ніяк не можуть бути незалежними
- Якщо A сталася ($\mathbb{P}(A) > 0$), то подія B ніяк не може статися, адже вони несумісні
- Тобто інформація про одну подію впливає на ймовірність іншої — **залежні**

$\square$

Незалежність і доповнення

Твердження (КЛ3.4.3)

Якщо події $A \perp\!\!\!\perp B$, то також $A \perp\!\!\!\perp B^c$, $A^c \perp\!\!\!\perp B$, $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Доведення.

- Нехай $A \perp\!\!\!\perp B$
- Якщо $\mathbb{P}(A) = 0$, то A незалежна від будь-якої події, у тому числі B^c
- Якщо $\mathbb{P}(A) > 0$, то

$$\mathbb{P}(B^c \mid A) = 1 - \mathbb{P}(B \mid A) = 1 - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B^c)$$

- Аналогічно доводять інші випадки

$\square$

Незалежність декількох подій

Визначення (КЛ3.4.4)

- Події $A_1, \dots, A_n$ незалежні ($A_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp A_n$), якщо:
    - $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)$ для всіх $i \neq j$
    - $\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(A_k)$ для всіх i, j, k різних
    - і т.д.
- Події зі зліченної послідовности $A_1, \dots, A_n, \dots$ незалежні, якщо незалежними є **будь-яке скінченне число** подій із послідовности

$\square$

Попарної незалежности недостатньо

Приклад (КЛ3.4.5)

- Нехай
$$\Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba, aaa, bbb, ccc\}$$
- Нехай усі ймовірності однакові
- Нехай $A =$«літера a опинилася на першій позиції», $B =$«літера b опинилася на другій позиції» і $C =$«літера c опинилася на третій позиції»
- Вочевидь, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/3$
- Також маємо, що $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/9$
- Події **попарно незалежні**
- Проте $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/9 \neq 1/27$
- Події **не є** незалежними

$\square$

- Виконання **тільки** $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ також **недостатньо**
- Нехай $\mathbb{P}(A) = 0$: рівність виконується
- Проте $\mathbb{P}(B)$ і $\mathbb{P}(C)$ можуть бути абсолютно довільні

Попарної незалежности недостатньо

Приклад (КЛ3.4.6)

- Нехай у родині $n \geq 2$ дітей
- Нехай імовірність обох статей 0.5
- Нехай $A_1 =$«у родині не більше від 1 дівчинки» і $A_2 =$«у родині є і хлопчики, і дівчатка»
- Чи можна казати, що $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$?
- Нехай $(G = k) =$«у родині точно k дівчаток» і $(B = k) =$«у родині точно k хлопчиків»
- Маємо:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(G = 0) + \mathbb{P}(G = 1) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} \\
\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}((G \geq 1) \cap (B \geq 1)) \\
&= 1 - \mathbb{P}((G = 0) \cup (B = 0)) = 1 - (\mathbb{P}(G = 0) + \mathbb{P}(B = 0)) = 1 - \frac{2}{2^n}
\end{aligned}$$

- З іншого боку,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(G = 1) = \frac{n}{2^n}$$

□

Попарної незалежности недостатньо

Приклад (КЛ3.4.6)

Продовження...

- Маємо:

$$\frac{1+n}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{2}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n} \quad \Rightarrow \quad n+1 = 2^{n-1}$$

- Події A_1 та A_2 незалежні **тоді й тільки тоді**, коли $n = 3$

□

Умовна незалежність

Визначення (КЛ3.4.7)

Події A і B **умовно незалежні** (conditionally independent) за умови настання події C ($A \perp\!\!\!\perp B \mid C$), якщо

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\,\mathbb{P}(B \mid C)$$

$\square$

- Умовна незалежність **прямо не пов'язана** з безумовною незалежністю

Умовна незалежність за різних подій

Приклад (КЛ3.4.8)

- Події можуть бути умовно незалежними за умови події C, але не за умови події C^c
- Нехай викладач:
  - Добрий, якщо ставить гарні оцінки за старання
  - Поганий, якщо ставить рандомні оцінки
- Нехай $G =$«викладач добрий», $W =$«студент інтенсивно працює», $A =$«студенту поставили відмінно»
- Тоді $\mathbb{P}(W \cap A \mid G^c) = \mathbb{P}(W \mid G^c)\,\mathbb{P}(A \mid G^c)$ (рандомні оцінки)
- Але, очевидно, для добрих викладачів такої незалежности немає

$\square$

Приклад (КЛ3.4.9)

- Із умовної незалежности **не випливає** незалежність безумовна
- Нехай маємо дві **нерозрізненні** монетки — правильну і таку, що герб випадає з імовірністю $3/4$
- Нехай у випадковий спосіб **таємно** обирають одну з них і підкидають n разів
- Нехай $F =$«обрано правильну монетку», $A_i =$«за i-им разом випав герб»
- Тоді $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n \mid F) = \mathbb{P}(A_1 \mid F) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid F) = 1/2^n$
- Так само $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n \mid F^c) = \mathbb{P}(A_1 \mid F^c) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid F^c) = 3^n/4^n$
- Проте події A_i, $i = 1, \ldots, n$, не є **безумовно** незалежні
  - Спостереження за монеткою змінюють апріорну ймовірність, що вона правильна

□

Приклад (КЛ3.4.10)

- Із безумовної незалежности **не випливає** незалежність умовна
- Нехай у відлюдника є тільки двоє друзів, що можуть йому зателефонувати
- Нехай щодня вони **незалежно один від одного** вирішують, зателефонувати чи ні
- Нехай $A =$«перший друг зателефонує наступного понеділка», $B =$«інший друг зателефонує наступного понеділка», $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$
- Ці події є **безумовно незалежні**
- Проте, якщо обумовити їх подією $C =$«у понеділок надійшов тільки один дзвінок», A і B **перестають бути незалежними**
    - Дзвінок від одного друга **виключає** можливість дзвінка від другого
    - Іншими словами, $\mathbb{P}(A \mid C) > 0$, хоча $\mathbb{P}(A \mid B, C) = 0$

$\square$

План лекції

- Випадкова величина — це фундаментальне поняття для теорії ймовірностей і статистики
- Розгляньмо експеримент:
  - Простір елементарних подій Ω
  - σ-алгебра $\mathcal{A}$ на ньому
  - Імовірнісна міра $\mathbb{P}$ на цій σ-алгебрі
- Ніщо не заважає брати й рахувати будь-які ймовірності
- Але на практиці нас цікавить **не** сам **результат** експерименту ($\omega \in \Omega$), **а** деяка **числова функція від нього**

- Наприклад: аналіз доходів працівників деякої галузи промисловости
- Опитати **всіх** практично неможливо
- Утворюємо **вибірку**, яка **репрезентативна** щодо популяції
- Суто формально результатом експерименту є множина **працівників**
- Нам це нецікаво: нам потрібна множина **доходів** цих працівників
- Ми хочемо обчислювати ймовірності подій у термінах **доходів** («дохід більше 10 000 грн»), а не **працівників**

- **Неформально** можна казати, що випадкова величина — це функція $X : \Omega \to \mathbb{R}$

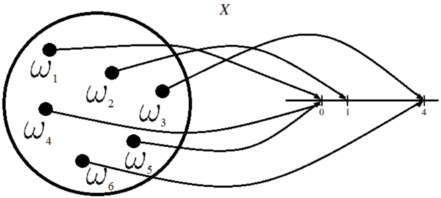


Рис. КЛ4.1.1

- Простір Ω втрачає особливу роль, і від нього можна абстрагуватися
- Випадкові величини, як правило, позначаємо **великими** літерами латинського алфавіту (X, Y, Z тощо)
- **Значення**, яких вони набувають — **маленькими** (x, y, z тощо)

Випадкова величина як функція

- На просторі Ω можна визначати **різні** випадкові величини

Приклад (КЛ4.1.1)

- Нехай викидують дві правильні шестигранні гральні кісточки:
  - Простір $\Omega = \left\{(x, y) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2\right\}$
  - Нехай X =«сума випалих чисел»:

$$X((1,1)) = 2\ , \quad X((1,2)) = X((2,1)) = 3$$

    тощо
  - Нехай Y =«сума випалих чисел є парним числом»:

$$Y((1,1)) = Y((1,3)) = \ldots = Y((6,6)) = 1$$
$$Y((1,2)) = Y((1,4)) = \ldots = Y((6,5)) = 0$$

- Нехай оцінюють імовірність, що деякий пристрій пропрацює певну кількість часу:
  - Маємо простір Ω усіх пристроїв
  - Нехай X =«кількість часу нормальної роботи», $X(\omega) = t$, $t \in (0; \infty)$
  - Нехай Y =«вартість обслуговування протягом часу t», де, скажімо,

$$Y(\omega) = 2\left(1 - 0.5e^{-0.2X(\omega)}\right) = 2\left(1 - 0.5e^{-0.2t}\right)$$

□

Чому величина «випадкова»

- Сама по собі функція X є **детермінованою**
- «Випадковість» постає з випадкової природи експерименту
- Результат експерименту $\omega \in \Omega$ **невідомий заздалегідь**
- Після завершення експерименту його результат **зафіксований**, і випадкова величина набуває **конкретного** значення $X(\omega)$

Визначення (КЛ4.1.2)

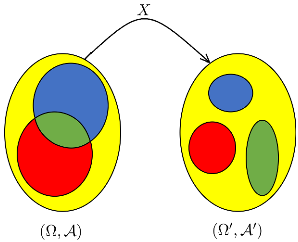
- Нехай маємо два вимірні простори $(\Omega, \mathcal{A})$ і $(\Omega', \mathcal{A}')$
- Функція $X : \Omega \to \Omega'$ **вимірна відносно** $\mathcal{A}$ (measurable $\mathcal{A}$ function), якщо для будь-якого $A' \in \mathcal{A}'$ справедливо

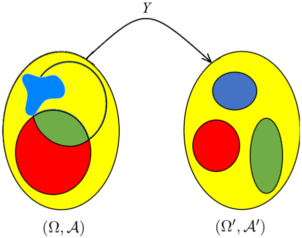
$$X^{-1}(A') \equiv \left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\right\} \in \mathcal{A}$$

- Тобто *прообразом* **кожної вимірної** множини в одному просторі є деяка **вимірна** множина в іншому просторі

$\square$

Ілюстрація





Функція X **вимірна**
Функція Y **не** вимірна

- Зрозуміло, що далеко не всі функції є вимірними
- У майбутніх лекціях ми розглядатимемо критерій вимірности
- Проте для дискретних просторів усе значно простіше

Зауваження (КЛ4.1.4)

- Нехай Ω — **дискретний** простір
- **Будь-яка** функція $X : \Omega \to \mathbb{R}$ є **вимірною**
- Це тому, що σ-алгебра дорівнює 2^{Ω} і містить **усі можливі** множини

$\square$

Нарешті визначення

Визначення (КЛ4.1.5)

- Дійснозначну вимірну функцію $X : \Omega \to \mathbb{R}$ називають **випадковою величиною** (random variable)
- За замовчуванням σ-алгеброю для простору $\mathbb{R}$ є Борелева σ-алгебра $\mathcal{B}$

$\square$

- Ми з початкового абстрактного ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ перейшли до нового простору $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$
- Потрібно навчитися обчислювати ймовірності подій у цьому новому просторі
- Для цього потрібно з'ясувати, **яку ймовірнісну міру** на ньому використати

Визначення (КЛ4.1.6)

- Функція (випадкова величина) X задає на вимірному просторі $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ймовірнісну міру

$$\mathbb{P}_X(A) \equiv \mathbb{P}_X(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right), \qquad A \in \mathcal{B} \tag{КЛ4.1.1}$$

- Таку міру називають **розподілом випадкової величини** X (distribution of a random variable)
- $\mathbb{P}_X$ є **образом міри** $\mathbb{P}$ під дією функції X ($\mathbb{P}_X$ is a measure **induced by** X)

$\square$

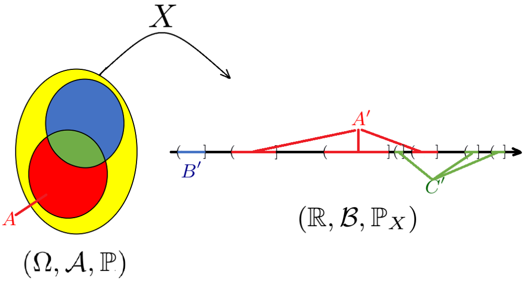
- Імовірність множини всіх таких елементів $\omega \in \Omega$, **образи** яких лежать в A
- Імовірність **прообразу** множини A

- На практиці нас цікавлять імовірності подій **за участю випадкових величин**
- Наприклад, імовірність, що $X > 0$ або $X \in [1; 5]$ тощо
- Імовірність такої події A можна обчислити за допомогою розподілу: $\mathbb{P}_X(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$
- Тоді природа ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ нас **мало цікавить**

Зауваження (КЛ4.1.7)

- Тепер зрозуміло, навіщо ми вимагали, щоб випадкова величина була вимірною функцією
- Імовірність будь-якої події з X можна буде обчислити

$\square$



- Імовірність множини ***A*** можна обчислити як

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A\})$$

- Імовірність її **образу** ***A'*** можна обчислити за визначенням як

$$\mathbb{P}\left(X^{-1}(A')\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}\right)$$

- А можна **забути про початковий простір** і використовувати **розподіл безпосередньо**:

$$\mathbb{P}_X\left(A'\right) = \mathbb{P}_X\left(\{x \in \mathbb{R} : x \in A'\}\right)$$

Розподіл є мірою

Твердження (КЛ4.1.8)

- Нехай маємо випадкову величину $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$
- Вона утворює розподіл $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$
- Тоді розподіл $\mathbb{P}_X$ є ймовірнісною мірою на $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Доведення.

- Перевірмо три аксіоми ймовірнісної міри
- **Невід'ємність** виконується, бо $\mathbb{P}$ невід'ємна
- Міра простору:

$$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_X(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{R}\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Розподіл є мірою

Доведення.

Продовження...

$\boldsymbol{\sigma}$-адитивність: нехай $A_1, A_2, \ldots$ — деякі несумісні події з $\mathcal{B}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}_X\left(X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_i\}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_X\left(X \in A_i\right)
\end{aligned}
$$

□

- **Носій** деякої функції f — множина, де $f \neq 0$

Визначення (КЛ4.1.9)

- **Носій** (support) випадкової величини X — множина $\operatorname{supp}(X) = S$
- S є доповненням найбільшої відкритої множини O такої, що $\mathbb{P}_X(O) = 0$
- Тобто носій — найменша замкнена множина, у якій «сконцентровано всю ймовірність розподілу $\mathbb{P}_X$»

□

Визначення (КЛ4.1.10)

Випадкові величини X і Y **рівні за розподілом** (equal in distribution), $X \overset{d}{=} Y$, якщо $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_Y(A)$ для всіх $A \in \mathcal{B}$ □

План лекції

Нагадування: Імовірність на зліченному просторі

- Нехай $|\Omega| < \infty$ або навіть $|\Omega| = \aleph_0$
- Тоді як σ-алгебру можна взяти **множину всіх підмножин**: $\mathcal{A} = 2^\Omega$
- Імовірнісну міру для вимірного простору $(\Omega, 2^\Omega)$ можна задати так

Теорема (КЛ2.3.1)

- $(\Omega, 2^\Omega)$ — деякий зліченний вимірний простір
- Функція $p : \Omega \to [0; 1]$:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

- Тоді $\mathbb{P} : 2^\Omega \to [0; 1]$ така, що

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \qquad \text{(КЛ2.3.1)}$$

є ймовірнісною мірою

Визначення (КЛ2.3.2)

Імовірнісну міру, утворену відповідно до Теореми КЛ2.3.1, називають **дискретною** (discrete), як і сам імовірнісний простір □

Визначення (КЛ4.2.1)

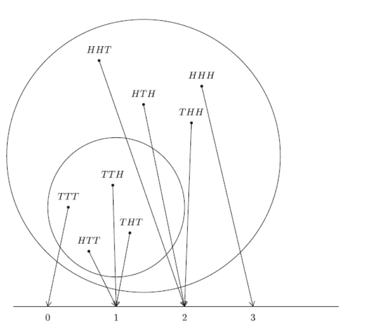
Випадкову величину X називають **дискретною**, як і відповідний їй розподіл, якщо носій $\operatorname{supp}(X)$ є не більш ніж зліченним $\square$

- Хоча $X : \Omega \to \mathbb{R}$, насправді $X : \Omega \to \{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_i \in \mathbb{R}$
- Дуже часто маємо $X : \Omega \to \mathbb{N}$ або $X : \Omega \to \mathbb{Z}$
- Носій дискретної величини: $\operatorname{supp}(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$
- Тобто $\mathbb{P}_X (\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}) = 0$

Приклад дискретної величини

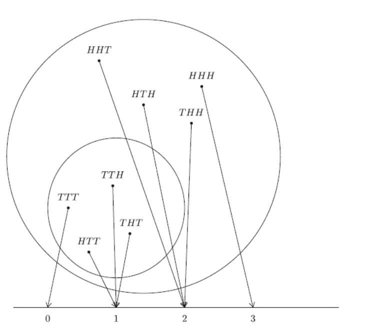
Приклад (КЛ4.2.2)

- Розгляньмо підкидування правильних монеток тричі: «Герб» $= 1$, «Число» $= 0$
- Імовірнісний простір буде $(\Omega = \{000, 001, \ldots, 111\}, \mathcal{A} = 2^{\Omega}, \mathbb{P})$
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{8}$ для всіх $\omega \in \Omega$
- Розгляньмо випадкову величину $X =$«сума випалих гербів»
- X має носій $\text{supp}\,(X) = \{0, 1, 2, 3\}$



Приклад (КЛ4.2.2)

Продовження...



- Наприклад, імовірність $X \le 1$:

$$\mathbb{P}_X(X \le 1) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le 1\})$$
$$= \mathbb{P}(\{000, 001, 010, 100\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad \square$$

- Хотілось би мати можливість обчислювати ймовірності для X, не звертаючись до початкової міри $\mathbb{P}$
- Оскільки $\mathbb{P}_X$ — дискретна міра, можна застосувати Теорему КЛ2.3.1

Визначення (КЛ4.2.3)

- Дискретна випадкова величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ з носієм $\operatorname{supp}(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$
- **Функція ймовірности** (probability mass function) $p_X(x) \equiv \mathbb{P}_X(X = x)$:

$$p_X(x) \begin{cases} \neq 0\,, & x \in \{x_1, x_2, \ldots\} \\ = 0\,, & x \notin \{x_1, x_2, \ldots\} \end{cases}, \qquad \sum_i p_X(x_i) = 1 \qquad \text{(КЛ4.2.1)}$$

- За Теоремою КЛ2.3.1, p_X визначає розподіл випадкової величини:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i) \qquad \text{(КЛ4.2.2)}$$

$\square$

Простий приклад

Приклад (КЛ4.2.4)

- Розгляньмо підкидування правильної монетки двічі поспіль
- Імовірнісний простір: $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbb{P})$
- $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$
- $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4}$ для всіх $\omega \in \Omega$
- Розгляньмо різні випадкові величини
- $X =$«число випалих гербів», $\operatorname{supp}(X) = \{0, 1, 2\}$
- Функція ймовірности в цьому випадку дорівнює

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & x = 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \\ \dfrac{1}{4}, & x = 2 \\ 0, & x \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

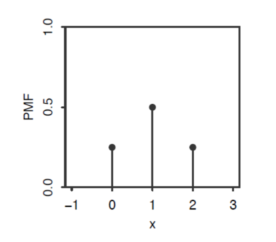
□

Простий приклад

Приклад (КЛ4.2.4)

Продовження...

- Тоді
$$\mathbb{P}_X\left(X \le 1\right) = \mathbb{P}_X\left(X = 0\right) + \mathbb{P}_X\left(X = 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$
- Або
$$\mathbb{P}_X\left(X \le 1\right) = 1 - \mathbb{P}_X\left(X = 2\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
- Уже не треба щоразу згадувати про $\mathbb{P}$ початкового простору



□

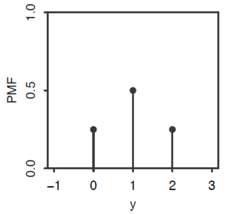
Приклад (КЛ4.2.4)

Продовження...

- Нехай Y =«число випалих чисел». Вочевидь, $Y = 2 - X$
- До того ж $p_Y(z) = p_X(z)$ для всіх $z = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_Y\left(Y = y\right) &= \mathbb{P}\left(\{\omega : Y(\omega) = y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{\omega : 2 - X(\omega) = y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{\omega : X(\omega) = 2 - y\}\right) = \mathbb{P}_X\left(X = 2 - y\right)\end{aligned}$$

- $X \stackrel{d}{=} Y$: **різні** величини можуть мати **однаковий** розподіл



$\square$

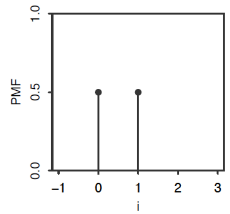
Простий приклад

Приклад (КЛ4.2.4)

Продовження...

- Нехай $I = 1$, якщо перший підкид завершився гербом, і 0 — якщо числом
- Тоді $I(10) = I(11) = 1$, $I(00) = I(01) = 0$
- Функція ймовірности дорівнює

$$p_I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x \neq 0, 1 \end{cases} \quad \square$$



Міркування щодо величин і розподілів

- Одному розподілу відповідають багато випадкових величин
- Доцільно розглядати розподіли та їхні властивості, а не конкретні випадкові величини
- Тому будемо казати «функція ймовірности розподілу», «носій розподілу» тощо
- Також будемо завжди розуміти, що функція ймовірности дорівнює 0 за межами носія