Теорія ймовірностей:
Практичне заняття 1
Обчислення класичної ймовірности

4 вересня 2025 р.

План заняття

План заняття

Простір елементарних подій

- Див. більше в Курсі лекцій, Розд. КЛ1.2–КЛ1.3
- **Випадковий експеримент** (random experiment) — деяка процедура, що відбувається за певних умов довільне число разів і результатом якого може бути **один із деякого набору можливих варіантів**

Визначення (КЛ1.2.1)

- **Простір елементарних подій** (sample space) Ω для деякого випадкового експерименту — множина всіх можливих його результатів. Може бути:
  - скінченний (finite): $|\Omega| < \infty$
  - зліченний (countable): $|\Omega| = \aleph_0$
  - незліченний (uncountable): $|\Omega| = \mathfrak{c}$
- Елемент $\omega \in \Omega$ — **елементарна подія** (sample)
- **Подія** (event) A — це деяка підмножина (subset) простору Ω: $A \subseteq \Omega$

$\square$

- **Сталася подія** A: результат експерименту належить множині A

Операції над множинами

Табл. КЛ1.2.1.: Інтерпретація основних теоретико-множинних понять у контексті подій

Теоретико-множинне поняття	Інтерпретація
порожня множина (empty set) $\emptyset$	неможлива подія (impossible event)
універсальна множина Ω	певна подія (certain event)
належність $\omega \in A$	сталася подія A
включення $A \subseteq B$	якщо сталася подія A, то сталася подія B
об'єднання (union) $\bigcup_{i \in I} A_i$	сталася принаймні одна з подій A_i, $i \in I$
перетин (intersection) $\bigcap_{i \in I} A_i$	одночасно сталися всі події A_i, $i \in I$
неперетинні (disjoint) множини $A \cap B = \emptyset$	події A і B несумісні (mutually exclusive)
заперечення (complement) A^c	подія A^c стається тоді і тільки тоді, коли подія A не стається
різниця (difference) двох множин, $A \backslash B = A \cap B^c$	сталася тільки подія A, точно не B
симетрична різниця (symmetric difference) двох множин, $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$	сталася тільки одна з двох подій A і B, точно не обидві

Визначення (КЛ1.3.1)

Умови:

- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ — скінченний простір елементарних подій
- Елементарні події попарно несумісні: $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$, $i \neq j$
- Експеримент завершується принаймні однією з елементарних подій: $\bigcup_{i=1}^{m} \{\omega_i\} = \Omega$
- Усі елементарні події однаково вірогідні

Класична ймовірність (classical, naive probability) події $A \subseteq \Omega$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{КЛ1.3.1}$$

□

Властивості класичної ймовірности

- $\mathbb{P}(A) \in [0; 1]$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- якщо події взаємовиключні, то $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

План заняття

- Елементи (скінченної) множини можна, звісно, перерахувати
- Проте для більш-менш великих множин це практично **нездійсненно**

Твердження (Практикум1.2.1 Правило множення)

- Нехай експеримент складається з n експериментів, $A_1, \ldots, A_n$
- Нехай експеримент A_i може завершитися r_i можливими варіантами, $i = 1, \ldots, n$
- Тоді загальне число впорядкованих варіантів завершення всіх експериментів дорівнює $r_1 \cdot \ldots \cdot r_n$

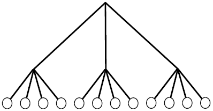

Рис. Практикум1.2.1

Вправа (Практикум1.2.2)

- У забігу беруть участь 10 спортовців
- Нічия неможлива
- Скільки існує можливих варіантів посідання (перших трьох) призових місць учасниками забігу?

$\square$

Розв'язання.

- Три експерименти:
  - A: посідання першого місця
  - B: посідання другого місця
  - C: посідання третього місця
- 10 варіантів для A
- Залишається 9 варіантів для B
- Залишається 8 варіантів для C
- Загалом $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ варіантів

$\square$

Зауваження (Практикум1.2.3)

- Хронологічний порядок ролі не грає
- Ми могли сказати, що експеримент C має 10 можливих варіантів, потім що A має 9 можливих варіантів, і нарешті, що B має 8 можливих варіантів
- Головне, що результати виконання трьох експериментів **впорядковані**, тобто що дві особи не можуть посісти одне місце

$\square$

Приклад (Практикум1.2.4)

- Студент планує придбати морозиво
- Морозивник торгує ванільним, полуничним та шоколадним морозивом, яке можна замовити у вафльовому ріжку або в пластиковому цеберку
- $3 \cdot 2 = 6$ усіх можливих варіантів придбання морозива
- Порядок непринциповий: $2 \cdot 3 = 6$ варіантів
- Непринципово, які саме смаки, головне, що на кожний тип пакування може бути 3 смаки

$\square$

План заняття

Вибір

- Значна кількість експериментів у теорії ймовірностей та статистиці полягає у здійсненні **вибору** (sampling) об'єктів із деякого набору
- Вибір може бути **чотирьох типів**
- Вибір можна класифікувати за принципом наявности повторень:
  - **Із повтореннями** (with replacement): об'єкт вибирають і повертають назад у набір
  - **Без повторень** (without replacement): об'єкт після вибору вилучають із початкового набору
- Вибір можна класифікувати за принципом збереження порядку:
  - **Зі збереженням порядку** (order matters): вибір об'єктів у різному порядку веде до різних результатів
  - **Без збереження порядку** (order doesn't matter): головне, які об'єкти вибрано, а не в якому порядку
- Зосередьмося поки що на експериментах, у яких **має значення порядок** здійснення вибору

Твердження (Практикум1.2.5)

- Нехай набір містить n об'єктів
- Нехай потрібно вибрати k об'єктів **із повтореннями** і **зі збереженням порядку**
- Тоді загальне число варіантів дорівнює n^k

Доведення.

- Уявімо вазу з n пронумерованих куль
- Експеримент: витягаємо кулю, записуємо її номер і повертаємо назад
- Такий експеримент має n варіантів завершення
- Усього треба витягти k куль, тобто маємо k експериментів
- Правило множення дає $n \cdot \ldots \cdot n = n^k$

□

Твердження (Практикум1.2.6)

- Нехай набір містить n об'єктів
- Нехай потрібно вибрати k об'єктів **без повторень** і **зі збереженням порядку**
- Тоді загальне число варіантів дорівнює $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Доведення.

- Уявімо вазу з n пронумерованих куль
- Експеримент: витягаємо кулю, записуємо її номер і **викидаємо її**
- Перший експеримент має n варіантів завершення
- Другий експеримент має $n-1$ варіантів завершення, і т.д.
- Усього треба витягти k куль — тобто k експериментів
- Правило множення дає

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

□

Вибір без повторень

Зауваження

- Частинний випадок розглянутої ситуації — коли треба вибрати n об'єктів із-посеред n штук без повторень
- Це має назву **перестановки** (permutation)
- За вищенаведеною формулою маємо $n!$ варіантів здійснення перестановок

$\square$

Вправа (Практикум1.2.8)

- У кімнаті присутні k осіб
- Вважатимемо, що маємо 365 днів року
- Нехай (для спрощення) день народження в будь-який день з однаковою ймовірністю
- Нехай дні народження незалежні один від одного
- Чому дорівнює ймовірність події $A =$«принаймні в однієї пари людей день народження припадає на один день»?

$\square$

Розв'язання.

- Простір елементарних подій Ω:
  - Усі можливі варіанти розподілу днів народження між людьми в кімнаті
  - День народження можна розглядати як кулю з вази, яку ми витягаємо і вручаємо деякій особі
  - Маємо вибір **із повтореннями** і **зі збереженням порядку**: $|\Omega| = 365^k$
- Множина A:
  - Напряму рахувати важко
  - Розгляньмо A^c — «усі дні народження різні»
  - Витягаємо з вази дні народження **без повторень**, але **зі збереженням порядку**:
  $$|A^c| = \frac{365!}{(365-k)!}$$
  - Відповідно,
  $$|A| = |\Omega| - |A^c| = 365^k - \frac{365!}{(365-k)!}$$
- Використовуючи (КЛ1.3.1), маємо:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-(k-1))}{365^k} \qquad \square$$

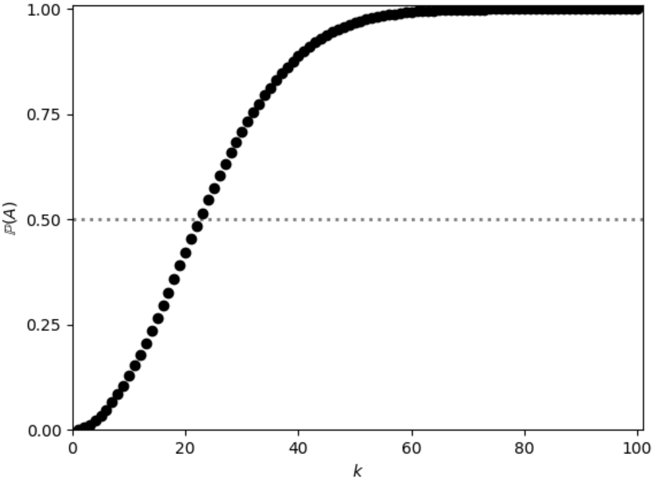

Рис. Практикум1.2.2.: Імовірність $\mathbb{P}(A)$ як функція від числа осіб у кімнаті k

Вправа (Практикум1.2.9)

- Нехай викидаємо правильну гральну кісточку двічі
- Яка подія ймовірніша?
- A =«сума двох чисел дорівнює 11»?
- B =«сума двох чисел дорівнює 12»?

□

Розв'язання.

- Простір елементарних подій:

$$\Omega = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{N}^2\ ,\ 1 \le x, y \le 6\right\}$$

- Шукані події:

$$A = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{N}^2 : x + y = 11\ ,\ 1 \le x, y \le 6\right\}$$
$$B = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{N}^2 : x + y = 12\ ,\ 1 \le x, y \le 6\right\}$$

- Фактично,

$$A = \left\{(5,6)^\top, (6,5)^\top\right\}\ , \qquad B = \left\{(6,6)^\top\right\}$$

- $\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B)$
- Ляйбніць стверджував, що $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$
- Він вважав, що і 11, і 12 можна дістати тільки в один спосіб (**не розрівняв дві кісточки**)

$\square$

Вибір без збереження порядку

- Застосування розглянутих формул буде **систематично завищувати** справжнє число можливих варіантів
- k об'єктів можна переставляти місцями в $k!$ способів
- Загальне число варіантів вибору k об'єктів за формулами з попереднього розділу в умовах **без збереження порядку** потрібно ділити на $k!$

Вибір без збереження порядку

Приклад (Практикум1.2.10)

Із членів комітету в n осіб можна обрати:

- $n(n-1)$ пар керівників (голова, заступник голови)
- Але тільки $\dfrac{n(n-1)}{2}$ пар **співголів**, оскільки співголови рівноцінні

$\square$

Вибір без збереження порядку

Приклад (Практикум1.2.11)

- Повернімося до морозив
- Студент купляє **два** морозива — на обід і на вечір
- На кожний прийом їжі ми нарахували 6 можливих варіантів
- Усього існує 36 упорядкованих пар (x, y)
- Які види морозива було **в принципі** придбано, **незважаючи на їхній порядок**?
- $36/2 = 18$ — **відповідь неправильна**
- Існує 6 пар (x, x), які потрібно врахувати явно
- Існує 30 **різних** пар (x, y), $x \neq y$, які справді можна вповловинити, а тому загальне число:
$$\frac{30}{2} + 6 = 21$$

□

Біномний коефіцієнт

Твердження (Практикум1.2.12)

- Нехай набір містить n об'єктів
- Нехай потрібно вибрати k об'єктів **без повторень** і **без збереження порядку**
- Тоді загальне число варіантів дорівнює

$$\binom{n}{k} \equiv \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\,, & k \le n \\ 0\,, & k > n \end{cases}, \qquad \text{(Практикум1.2.1)}$$

де $\binom{n}{k}$ називають **біномним коефіцієнтом** (binomial coefficient)

Доведення.

- Раніше ми показали, що існує $\frac{n!}{(n-k)!}$ варіантів вибору k елементів із-посеред n можливих
- Порядок вибраних елементів нас не цікавить
- Усього існує $k!$ варіантів перестановок цих елементів, тому ми повинні поділити загальне число варіантів на $k!$ $\square$

Ілюстрація

- Seeing Theory

Вправа (Практикум1.2.13)

Скільки існує варіантів перестановок літер у слові «математика»? □

Розв'язання.

Спосіб 1:

- Усього існує 10! перестановок літер слова «математика»
- Літера «а» повторюється тричі, тому існує 3! перестановок цих літер
- Літери «м» і «т» повторюються двічі, тому існує 2! перестановок кожної
- Отже маємо $\dfrac{10!}{3!2!2!} = 151\ 200$ варіантів

Спосіб 2:

- Витягаємо з вази **позиції, які може зайняти літера «а»**
- Позиції витягаємо **без повторень** і **без збереження порядку**
- Для літери «а» можна витягти $\binom{10}{3}$ позицій
- Для літери «м» залишається вже 7 можливих позицій, тому маємо $\binom{7}{2}$
- І т.д. для всіх літер
- За правилом множення, маємо стільки варіантів:

$$\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 151\ 200$$

Приклад (Практикум1.2.14)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\ , \quad n \in \mathbb{N}^+$$

Доведення подивіться в Практикумі $\square$

Full House

Вправа (Практикум1.2.15)

- Гра в покер: 5 карт із колоди в 52 карти
- 13 звань та 4 масті
- Full house: 3 карти одного звання, 2 — іншого
- Чому дорівнює ймовірність дістати full house (подія A)?

$\square$

Розв'язання.

- Простір елементарних подій:
  - Усі набори містять по 5 карт
  - Тому $|\Omega| = \binom{52}{5}$
- Множина A — експеримент із чотирьох частин:
  1. Вибрати звання для трьох карт: 13 варіантів
  2. Вибрати три карти цього звання: $\binom{4}{3}$ варіантів
  3. Вибрати звання для двох карт: 12 варіантів
  4. Вибрати дві карти цього звання: $\binom{4}{2}$ варіантів
- Імовірність:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13\binom{4}{3}12\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3\ 744}{2\ 598\ 960} \approx 0.001$$

□

Вправа (Практикум1.2.16)

- У 1693 р. до Айзека Ньютона (Isaac Newton) звернувся британський діяч Семюел Піпс (Samuel Pepys) із таким питанням
- Імовірність якої з подій більша?
- $A =$«на 6 гральних кісточках випала принаймні одна шістка»?
- $B =$«на 12 гральних кісточках випало принаймні дві шістки»?
- $C =$«на 18 гральних кісточках випало принаймні три шістки»?

□

Розв'язання.

- 6 кісточок
- $|\Omega| = \{1, \ldots, 6\}^6 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^\top \in \mathbb{N}^6 \,,\ 1 \le x, y \le 6\right\}$
- Знайдімо потужність A^c — не випало **жодної** шістки
- Вибираємо цифри від 1 до 5 з повтореннями і зі збереженням порядку:

$$\mathbb{P}\,(A) = 1 - \frac{5^6}{6^6} \approx 0.67$$

$\square$

Розв'язання.

Продовження...

- 12 кісточок
- $|\Omega| = \{1, \dots, 6\}^{12}$
- Знайдімо потужність B^c — не випало **жодної** шістки чи випала **одна** шістка
- Не випало жодної шістки — як і вище, маємо 5^{12} варіантів
- Випала одна шістка:
  - Спочатку вибираємо **позицію** для шістки: $\binom{12}{1}$ варіантів
  - Вибравши позицію для шістки, витягаємо цифри від 1 до 5 на решту позицій — 5^{11} варіантів
- Отже,

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{5^{12} + \binom{12}{1} 5^{11}}{6^{12}} \approx 0.62$$

$\square$

Розв'язання.

Продовження...

- 18 кісточок
- $|\Omega| = \{1, \ldots, 6\}^{18}$
- Знайдімо потужність C^c — не випало **жодної** шістки чи випала **одна** шістка чи випали **дві** шістки
- Не випало жодної шістки — як і вище, маємо 5^{18} варіантів
- Випала одна шістка — як і вище, маємо $\binom{18}{1} 5^{17}$ варіантів
- Випало дві шістки — як і вище, маємо $\binom{18}{2} 5^{16}$ варіантів
- Отже,
$$\mathbb{P}(C) = 1 - \frac{5^{18} + \binom{18}{1} 5^{17} + \binom{18}{2} 5^{16}}{6^{18}} \approx 0.60$$
- Отже A має найвищу ймовірність

□

Вибір із повтореннями

Твердження (Практикум1.2.17)

- Нехай набір містить n об'єктів
- Нехай потрібно вибрати k об'єктів **з повтореннями**, але **без збереження порядку**
- Тоді загальне число варіантів дорівнює $\binom{n+k-1}{k}$

Доведення.

- Ізоморфна задача: **нерозрізненні** кулі у **розрізненних** вазах (*конденсат Боуза-Айнштайна, Bose-Einstein condensate*)

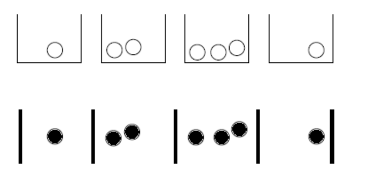

Рис. Практикум1.2.3

- Послідовність вертикальних рисок і точок (англ. stars and bars)
- Перша й остання риска — обов'язкові і ми їх не чіпаємо
- Усі інші можна перетасовувати
- Усього $n + k - 1$ позицій, на які треба розмістити k точок **без повторень** — $\binom{n+k-1}{k}$ варіантів

$\square$

Який зв'язок із початковою задачею?

- Ваза — об'єкт
- Кількість куль у вазі — число разів, скільки було вибрано цю вазу
- Кулі нерозрізненні — вибір без збереження порядку
- Куля може потрапити в кожну вазу — вибір із повтореннями

Табл. Практикум1.2.1.: Способи підрахунку кількостей можливих варіантів для виборів різного типу

	Зі збереженням порядку	Без збереження порядку
Із повтореннями	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Без повторень	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Вправа (Практикум1.2.20)

- Для захисту своїх телефонів користувачі можуть задавати пароль із чотирьох цифр

1) Скільки існує можливих паролів?
2) Якщо «унікальний пароль» — пароль із чотирьох *різних* цифр (тобто пароль 6713 — унікальний, а 8824 — ні), то скільки існує таких паролів?
3) Якщо «зростаючий» пароль — де кожна цифра не менша від попередньої (тобто 4789 і 4488 — зростаючі, а 8239 — ні), то скільки існує одночасно унікальних і зростаючих паролів?
4) Скільки існує паролів, які зростаючі, але необов'язково унікальні?

□

Розв'язання.

1) Вибір 4 цифр із 10 можливих **із повтореннями** та **зі збереженням порядку**, тому 10^4 паролів
2) Вибір 4 цифр із 10 можливих **без повторень** та **зі збереженням порядку**, тому $\frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ паролів
3)
   - Будь-яку послідовність із 4 різних цифр можна *в єдиний спосіб* упорядкувати за зростанням (цифри 6, 2, 5, 0 можна впорядкувати і дістати 0, 2, 5, 6)
   - Із усіх 4! можливих перестановок нас цікавить тільки одна
   - Отже маємо $\frac{10!}{6!4!} = \binom{10}{4}$ паролів
   - **Інше пояснення**: Вибір 4 цифр із 10 можливих **без повторень** та **без збереження порядку**
4) Вибір 4 цифр із 10 можливих **із повторенням** та **без збереження порядку**, тому $\binom{10+4-1}{4}$ паролів

$\square$