Теорія ймовірностей:
Практичне заняття 3
Властивості ймовірнісної міри

18 вересня 2025 р.

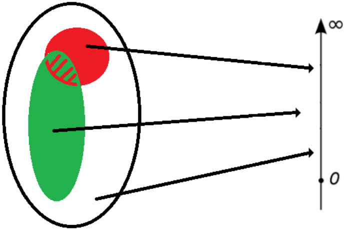
План заняття

1. Основні теоретичні відомості
2. Застосування властивостей імовірностей
3. Теорема включення-виключення
4. Властивості міри

План заняття

Визначення (КЛ2.1.1)

Функція від множини (set function) — це функція $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, де $\mathcal{C} = \{A : A \subseteq \Omega\}$ $\square$



- Будь-яка функція $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — це також функція від множини: $g(x) \equiv g(\{x\})$
- Ми **не розрізнятимемо** ці види функцій, а просто казатимемо — «функція»

Визначення (КЛ2.1.2)

Функція $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — **міра** (measure), якщо:

(i) $\mu(A) \geq 0$ для всіх $A \in \mathcal{A}$

(ii) μ є σ**-адитивною** (σ-additive)

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\ , \quad A_j \in \mathcal{A}\ ,\ j = 1, 2, \ldots\ , \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j \tag{КЛ2.1.1}$$

□

Скінченність міри

- Мірою простору $\mu(\Omega)$ може бути будь-яке число і навіть ∞
- Якщо $\mu(\Omega) < \infty$, то міра **скінченна**

Визначення (КЛ2.1.3)

Міра μ є **σ-скінченною** (σ-finite), якщо:

- $\mu(\Omega) = \infty$
- Існує розбиття $\{A_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots\}$ простору Ω таке, що $\mu(A_i) < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$

$\square$

Визначення (КЛ2.1.5)

Міру $\mathbb{P}$, яка задовольняє всі аксіоматичні властивості з Визначення КЛ2.1.2, і до того ж $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, називають **імовірнісною мірою** (probability measure) $\square$

Визначення (КЛ2.1.6)

- Трійку $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ називають **мірним простором** (measure space)
- Зокрема, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ називають **імовірнісним простором** (probability space)

$\square$

Основні властивості міри

Теорема (КЛ2.2.1)

(Будь-яка) міра μ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ має такі властивості:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Міра є **скінченно-адитивною** (адитивною, finitely additive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\ , \quad A_j \in \mathcal{A}\ ,\ j = 1, 2, \dots\ , \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j \tag{КЛ2.2.1}$$

(iii) μ є монотонно неспадною (monotonically nondecreasing):

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2)\ , \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A}\ ,\ A_1 \subseteq A_2$$

- Як наслідок, якщо $A_1 \subseteq A_2$, то $\mu(A_2 \backslash A_1) = \mu(A_2 \cap A_1^c) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$

(iv) μ є **σ-субадитивною** (σ-subadditive):

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\ , \quad A_j \in \mathcal{A}\ ,\ j = 1, 2, \dots \tag{КЛ2.2.2}$$

тобто навіть для **перетинних множин**

- Ця нерівність також відома як **нерівність Була** (Boole's inequality)

(v) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Зауваження (КЛ2.2.3)

- Нормалізація $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ дає такі властивості
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$

$\square$

План заняття

Вправа (Практикум3.2.1)

- Нехай $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$
- Нехай $\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{4}$
- Чи можуть A та B бути несумісними?

$\square$

Розв'язання.

- $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = \frac{3}{4}$
- Якщо A і B **несумісні**, то $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- Тобто $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} > 1$
- Це **неможливо**, бо $\mathbb{P}(A) \leq 1$ для всіх A

$\square$

Вправа (Практикум3.2.2)

- Доведіть такі нерівності:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \qquad \text{(Практикум3.2.1)}$$

- Вкажіть умови, за яких ці нерівності обертатимуться в рівності

□

Розв'язання.

- Спочатку потрібно побачити, що $A \cap B \subseteq A \cup B$
- Із властивости монотонности (iii) з Теореми КЛ2.2.1 випливає:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$$

- Ця нерівність обернеться в рівність, якщо $A \cap B = A \cup B$, тобто якщо $A = B$
- (Строго кажучи, коли $A = B$ майже напевно, див. Практикум)

Розв'язання.

Продовження...

- Для доведення другої нерівности використаймо властивість (v) із Теореми КЛ2.2.1:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- За невід'ємністю міри, $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$
- Отже
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
- Ця нерівність обернеться в рівність, якщо $A \cap B = \emptyset$ (фактично, це буде адитивність)
- (Або знову ж таки, строго кажучи, коли $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, тобто перетин може бути і не порожнім, але головне, що міри 0)

$\square$

Візит до лікаря

Вправа (Практикум3.2.3)

- Розгляньмо такі дві події
- S =«після візиту до сімейного лікаря пацієнту дадуть скерування до спеціаліста»
- L =«після візиту до сімейного лікаря пацієнту дадуть скерування на аналізи»
- Покладімо, що $\mathbb{P}(S) = 0.25$, $\mathbb{P}(L) = 0.35$
- Також нехай $\mathbb{P}$ («ні те, ні інше») $= 0.45$
- Чому дорівнює ймовірність:
    - Скерування **щонайменше** на одну з цих опцій?
    - Скерування **одночасно** і до спеціаліста, і на аналізи?

$\square$

Розв'язання.

- Можна помітити, що в термінах відповідних подій «ні те, ні інше» означає $S^c \cap L^c$
- Отже $\mathbb{P}(S^c \cap L^c) = 0.45$, звідки $\mathbb{P}((S^c \cap L^c)^c) = 1 - 0.45 = 0.55$
- Але за правилами де Моргана, $(S^c \cap L^c)^c = S \cup L$, тобто те, що ми шукаємо
- Отже
$$\mathbb{P}(S \cup L) = 0.55$$

Розв'язання.

Продовження...

- Розгляньмо тепер скерування **одночасно** і до спеціаліста, і на аналізи
- Це є перетин $\mathbb{P}(S \cap L)$
- Ми не знаємо, як обчислювати перетин, зате знаємо, як обчислювати об'єднання:
$$\mathbb{P}(S \cup L) = \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(L) - \mathbb{P}(S \cap L)$$
- Звідси
$$0.55 = 0.25 + 0.35 - \mathbb{P}(S \cap L)$$
- Отже $\mathbb{P}(S \cap L) = 0.05$

□

Вправа (Практикум3.2.4)

- Нехай A_n, $n = 1, 2, \ldots$ — деякі події в імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- Зверніть увагу, що ми не вважаємо, що це розбиття (події можуть бути перетинні)
- Нехай $\mathbb{P}(A_n) = 1$ для всіх n
- Доведіть, що

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$$

□

Розв'язання.

- За законами де Моргана:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0$$

- Ми знаємо, що $\mathbb{P}(A_n) = 1$ для всіх n
- Тому $\mathbb{P}(A_n^c) = 0$ для всіх n
- Можемо застосувати нерівність Була:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0$$

$\square$

Вправа (Практикум3.2.5)

- Нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A})$
- Нехай на ньому визначено дві ймовірнісні міри, $\mathbb{P}$ і $\mathbb{Q}$
- Нехай $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ для всіх $A \in \mathcal{A}$ таких, що $\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{2}$
- Доведіть, що $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ для всіх $A \in \mathcal{A}$

$\square$

Рівність мір

Розв'язання.

- Розгляньмо два випадки
- Якщо $A \in \mathcal{A}$ така, що $\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{2}$, то $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A)$ **за умовою**
- Нехай $A \in \mathcal{A}$ така, що $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$
- Тоді
$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{Q}(A^c)$$
- Звідси $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A)$ для $A \in \mathcal{A}$ таких, що $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$
- А отже $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ **для всіх** $A \in \mathcal{A}$

$\square$

- Умова $\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{2}$, **а не** $\mathbb{P}(A) < \frac{1}{2}$, є посутньою
- Справді, нехай $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- Нехай

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0\ ,\ \mathbb{P}(\Omega) = 1\ ,\ \mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{Q}(\emptyset) = 0\ ,\ \mathbb{Q}(\Omega) = 1\ ,\ \mathbb{Q}(\{1\}) = \frac{1}{3}\ ,\ \mathbb{Q}(\{2\}) = \frac{2}{3}$$

- Суто формально $\mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)$ для всіх $A \in \mathcal{A}$ таких, що $\mathbb{P}(A) < \frac{1}{2}$, оскільки така множина єдина — це **порожня множина**
- Але очевидно, що цієї вимоги **недостатньо** для рівности двох мір

План заняття

Теорема (КЛ2.2.6)

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — деякий імовірнісний простір. Тоді

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \tag{КЛ2.2.3}$$

Задача зіставлень де Монморта (de Montmort's matching problem)

Приклад (Практикум3.3.1)

- Нехай маємо колоду з n карт, пронумерованих від 1 до n та викладених на стіл у випадковому порядку
- Нехай ми по черзі перегортаємо карти
- Яка ймовірність, що **принаймні одна** i-та перегорнута карта має номер i?
- Альтернативні інтерпретації:
  - Принаймні одна мати знайде свою дитину
  - Принаймні один студент сяде за ту саму парту
  - Принаймні один чоловік надягне свого капелюха

□

Приклад (Практикум3.3.1)

Продовження...

- Позначмо A_i =«i-та витягнута карта має номер i»
- Нас цікавить $\mathbb{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)$
- За Теоремою КЛ2.2.6,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}\left(A_i\right) - \sum_{i<j} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right)$$

- Треба підрахувати ймовірності всіх перетинів

$\square$

Задача зіставлень де Монморта (de Montmort's matching problem)

Приклад (Практикум3.3.1)

Продовження...

- Подія $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ — **точно k карт** стоять на своїх позиціях
- Тобто карти з номерами $i_1, \ldots, i_k$ стоять на позиціях $i_1, \ldots, i_k$
- Застосовне **класичне визначення ймовірности**
- Простором Ω буде множина всіх можливих перестановок n карт
- Можна бачити, що $|\Omega| = n!$
- Подія $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ передбачає, що позиції $i_1, \ldots, i_k$ **зафіксовані**
- Тому $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$
- Приклади:

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(A_2 \cap A_5 \cap A_7) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

□

Приклад (Практикум3.3.1)

Продовження...

- Застосування (КЛ2.2.3) дає

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i<j} \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{i<j<k} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

- Скільки доданків у кожній сумі?
- У кожній k-ій сумі є $\binom{n}{k}$ доданків
- Остаточно маємо:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n \cdot \frac{1}{n} - \frac{\binom{n}{2}}{n(n-1)} + \frac{\binom{n}{3}}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \qquad \text{(Практикум3.3.1)}$$

□

Приклад (Практикум3.3.1)

Продовження...

- Згадайте ряд Тейлора для експоненти:

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

- Звідси

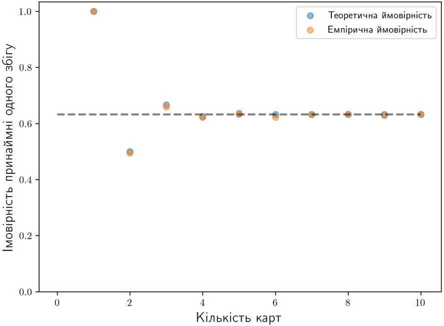
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$$

- Зверніть увагу, що ймовірність буде приблизно однаковою для різних n
- Хоча «інтуїція» підказує, що зі збільшенням n повинно бути більше «шансів», щоб хоча б одна карта стала на свою позицію

□

Задача зіставлень де Монморта (de Montmort's matching problem)

- Можемо зробити симуляцію за **методом Монте-Карло** (Monte Carlo simulation)
- Він передбачає відтворення деякого випадкового експерименту **велику кількість разів**
- У нашому прикладі ми симулюємо витягування карт і фіксуємо успішність кожного з них
- Відносна частота успіхів є **емпіричною ймовірністю**
- Симуляції можна провести для $n = 1, \ldots, 10$
- Для кожного n виконуємо 10 000 повторень експерименту



Вправа (Практикум3.3.2)

- Нехай маємо групу з 7 людей
- Вважатимемо, що дні народження припадають на різні пори року з однаковою ймовірністю
- Чому дорівнює ймовірність, що є принаймні один день народження на кожну пору року?

□

Розв'язання.

- Спочатку треба визначити по події на кожну пору року
- Позначмо A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — **принаймні один** день народження в пору року i
- Згідно з законом де Моргана,

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c \cup A_4^c\right)$$

- Тоді A_i^c, $i = 1, 2, 3, 4$ — **жодного** дня народження в пору року i

Розв'язання.

Продовження...

- Отже за Теоремою включення-виключення маємо

$$\mathbb{P}(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c \cup A_4^c) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(A_i^c) - \sum_{i<j} \mathbb{P}\left(A_i^c \cap A_j^c\right) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}\left(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c\right) - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c)$$

- Знову застосовна **класична ймовірність**
- Так,

$$\mathbb{P}(A_i^c) = \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

- Імовірність перетинів:

$$\mathbb{P}\left(A_i^c \cap A_j^c\right) = \left(\frac{2}{4}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

Розв'язання.

Продовження...

- Імовірність потрійних перетинів:

$$\mathbb{P}\left(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^7$$

- Очевидно, $\mathbb{P}\left(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c\right) = 0$
- Отже,

$$\mathbb{P}\left(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c \cup A_4^c\right) = 4 \cdot \frac{3^7}{4^7} - \binom{4}{2}\frac{1}{2^7} + \binom{4}{3}\frac{1}{4^7} \approx 0.487$$

- Відтак шукана ймовірність дорівнює

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c \cup A_4^c\right) \approx 0.513$$

$\square$

Подружні пари

Вправа (Практикум3.3.3)

- Нехай за святковий стіл потрібно всадити 4 подружні пари
- Чому дорівнює ймовірність, що **жодна** жінка не сидітиме поруч зі своїм чоловіком?

□

Розв'язання.

- Нехай E_i =«чоловік і дружина з подружньої пари **номер** $\boldsymbol{i}$ сидять поруч»
- Нас цікавить імовірність

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right)$$

- Застосовуємо Теорему включення-виключення:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(E_i \cap E_j \cap E_k) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$$

Подружні пари

Розв'язання.

Продовження...

- Знову маємо ситуацію з **класичною ймовірністю**
- Простір Ω у цьому випадку — множина всіх можливих розсадок за столом
- Вочевидь, $|\Omega| = 8!$
- Тоді $E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}$, де $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ — це «подружні пари $i_1, \ldots, i_k$ сидять поруч»
- Підрахуймо потужність:
  - Розгляньмо k подружніх пар як **нерозривні**
  - Загальне число варіантів розсаджування k **пар** і $8 - 2k$ **окремих осіб** дорівнює $(8 - k)!$
  - Чоловіка й дружину **в рамках пари** можна переставляти — усього маємо 2^k варіантів
  - Отже $|E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_k}| = 2^k(8 - k)!$
- Остаточно маємо

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = \binom{4}{1}\frac{2^1 \cdot 7!}{8!} - \binom{4}{2}\frac{2^2 \cdot 6!}{8!} + \binom{4}{3}\frac{2^3 \cdot 5!}{8!} - \binom{4}{4}\frac{2^4 \cdot 4!}{8!} \approx 0.657$$

- Шукана ймовірність дорівнює приблизно 0.343 □

План заняття

Перевірка властивостей міри

Вправа (Практикум3.4.1)

- Нехай маємо вимірний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- Тут Ω — деякий **незліченний** простір елементарних подій
- Нехай σ-алгебра $\mathcal{A}$ містить такі події, які або **самі є не більш ніж зліченними**, або їхні **доповнення є не більш ніж зліченними**
- Розгляньмо $\mathbb{P}$ таку, що:
    - $\mathbb{P}(A) = 0$, якщо A **не більш ніж зліченна**
    - $\mathbb{P}(A) = 1$, якщо A^c **не більш ніж зліченна**
- Покажіть, що $\mathbb{P}$ є ймовірнісною мірою

□

Перевірка властивостей міри

Розв'язання.

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ — **очевидно**
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, адже $\Omega^c = \emptyset$ не більш ніж злічення
- Достатньо перевірити σ-адитивність
- Розгляньмо несумісні події $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
- Розгляньмо

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Розв'язання.

Продовження...

- Якщо A **не більш ніж зліченна**, то і **всі** A_n, $n = 1, 2, \ldots$, також, і тому

$$\mathbb{P}(A) = 0 = 0 + 0 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- Якщо A **незліченна, але** A^c не більш ніж зліченна, то **щонайменше** одна з A_n незліченна
- Така незліченна множина **єдина**
- Доведення від супротивного:
  - Нехай A_i і A_j, $i \neq j$, **одночасно** є незліченними
  - Тоді A_i^c і A_j^c **одночасно** є не більш ніж зліченними
  - $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A_i \subset A_j^c$
  - Якщо A_j^c не більш ніж зліченна, то її підмножина A_i також не більш ніж зліченна
  - **Суперечність** доводить твердження
- Тоді

$$\mathbb{P}(A) = 1 = 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots = \sum_{n=1}^{n_0-1} \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Неперервність міри

Визначення (КЛ2.2.7)

- Нехай маємо μ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ і $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$
- Міра μ **неперервна знизу** (continuous from below), якщо

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\lim_{i\to\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

- Міра μ **неперервна зверху** (continuous from above), якщо

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\lim_{i\to\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

- Міра μ **неперервна** (continuous), якщо вона **одночасно** неперервна як зверху, так і знизу
- Міра **неперервна в порожній множині** (continuous at the empty set), якщо $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, $A_i \to \emptyset$, а $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = 0$

$\square$

Неперервність міри

Теорема (КЛ2.2.8)

(i) Будь-яка міра μ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ є неперервна

(ii) Нехай μ:
   - скінченна
   - невід'ємна
   - адитивна
   - неперервна в порожній множині
   - $\mu(\emptyset) = 0$

- ...тоді μ є σ-адитивною (тобто **є мірою**)

Приклад (Практикум3.4.2)

- Нехай маємо **нескінченно велику** вазу і **нескінченно великий** набір **пронумерованих** куль
- За **1 хв до півночі** у вазу кладуть кулі з номерами **від 1 до 10** і відразу **витягають** кулю з **номером 10**
- За **0.5 хвилини до півночі** у вазу кладуть кулі з номерами **від 11 до 20** і відразу **витягають** кулю з **номером 20**
- На n-ому кроці, тобто за $\mathbf{2^{-(n-1)}}$ **хвилин до півночі**, $n = 1, 2, \ldots$, у вазу кладуть кулі з номерами **від** $\mathbf{10(n-1)+1}$ **до** $\mathbf{10n}$ і відразу витягають кулю з номером $\mathbf{10n}$
- Скільки у вазі зберігатиметься куль станом на північ?
- Нескладно бачити, що **нескінченність**: номери яких **не будуть** кратні 10

$\square$

Приклад (Практикум3.4.2)

Продовження...

- Розгляньмо тепер модифікований експеримент
- На кожному кроці n витягають не кулю з номером $10n$, $n = 1, 2, \ldots$, а **кулю з номером n**
- За хвилину до півночи — кулю з номером 1, за пів хвилини — кулю з номером 2 тощо
- Знову на кожному кроці кладуть 10, а витягають 1
- Скільки залишиться куль станом на північ?
- Нескладно бачити, що **жодної**: за $2^{-(n-1)}$ хвилин до півночи з вази буде витягнуто кулю з номером n
- Це справедливо для кожного $n = 1, 2, \ldots$

$\square$

Приклад (Практикум3.4.2)

Продовження...

- Розгляньмо тепер ще один одифікований експеримент
- На кожному кроці n витягають не кулю з номером n, $n = 1, 2, \ldots$, а **кулю з випадковим номером від 1 до 10n**
- Скільки залишиться куль станом на північ?
- Позначмо A_n =«після n витягів у вазі залишатиметься куля **з номером 1**»
- Можна порахувати, що

$$\mathbb{P}\left(A_1\right) = \frac{9}{10}\,, \quad \mathbb{P}\left(A_2\right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{18}{19}\,, \quad \mathbb{P}\left(A_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{9k}{9k+1}$$

- Маємо незростаючу послідовність: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$
- Згідно з неперервністю міри:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{9k}{9k+1}$$

Приклад (Практикум3.4.2)

Продовження...

- Розгляньмо границю

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{9k}{9k+1}} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{9k}\right)$$

- Можна помітити, що

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{9k}\right) &= \left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{18}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{9n}\right)\\ &> \frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{9n}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

□

Приклад (Практикум3.4.2)

Продовження...

- Із теорії рядів нам відомо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

- Отже

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{9k}\right) = \infty$$

- У підсумку ми маємо:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{9k}{9k+1} = 0$$

- Куля з номером 1 **не залишиться у вазі** станом на північ із **імовірністю 1**

$\square$

Приклад (Практикум3.4.2)

Продовження...

- Аналогічно можна показати для **будь-якої** кулі
- Позначмо F_n =«куля з номером n **залишиться** у вазі станом на північ»
- Отже $\mathbb{P}(F_n) = 0$ для всіх $n = 1, 2, \ldots$
- Згідно з нерівністю Була,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = 0$$

- Отже ймовірність того, що **принаймні одна куля** залишиться, дорівнює 0

□

Вправа (Практикум3.4.4)

- Нехай маємо мірний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda) = ((0;1], \mathcal{B}(0;1], \lambda)$, де λ — міра Лебега
- Визначмо
$$\Omega' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le 1 \ , \ 0 < y \le 1\right\}$$
- Тобто $(0;1] \times (0;1]$
- Розгляньмо клас множин $\mathcal{A}'$, до якого належать множини виду
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \ , \ 0 < y \le 1\right\} \ , \quad A \in \mathcal{A}$$
- Нехай
$$\mathbb{P}\left(A \times (0;1]\right) = \lambda(A) \ , \quad A \in \mathcal{A}$$
- Доведіть, що $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P})$ є **ймовірнісним простором**

□

Розв'язання.

- Чи є $\mathcal{A}'$ є σ-алгеброю?
- Простір належить: $\Omega' \in \mathcal{A}'$, оскільки $\Omega' = \Omega \times (0;1]$
- Доповнення належать:
  - Нехай $B \in \mathcal{A}'$, тобто $B = A \times (0;1]$, $A \in \mathcal{A}$
  - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
  - Отже і $A^c \times (0;1]$ належить $\mathcal{A}'$
- Об'єднання належать:
  - Нехай
$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times (0;1]) \ , \quad A_i \in \mathcal{A} \ , \quad i = 1, 2, \ldots$$
  - $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
  - Відтак
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times (0;1]) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \times (0;1] \in \mathcal{A}'$$

Чи є простір імовірнісним

Розв'язання.

Продовження...

- Чи є $\mathbb{P}$ імовірнісною мірою:

$$\mathbb{P}\left(A \times (0;1]\right) = \lambda(A)\ , \quad A \in \mathcal{A}$$

- Вона **невід'ємна**, бо міра Лебега невід'ємна
- Міра простору:

$$\mathbb{P}\left(\Omega'\right) = \mathbb{P}\left(\Omega \times (0;1]\right) = \lambda(\Omega) = 1$$

- Перевірмо σ-адитивність:
  - Нехай $B_i = A_i \times (0;1]$ для деяких неперетинних $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$
  - Тоді

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \times (0;1]\right) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i \times (0;1]\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(B_i\right)$$

$\square$