



# ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>11 Математика і статистика</i>
Спеціальність	<i>113 Прикладна математика</i>
Освітня програма	<i>НАУКА ПРО ДАНІ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ</i>
Статус дисципліни	<i>Вибіркова</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>4 курс, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>4 кредити ЄКТС</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Залік</i>
Розклад занять	
Мова викладання	<i>Українська, англійська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: <i>доктор фіз.-мат. наук, с.н.с., Норкін Володимир Іванович, Vladimir.norkin@gmail.com</i> Практичні / Семінарські: <i>доктор фіз.-мат. наук, с.н.с., Норкін Володимир Іванович, Vladimir.norkin@gmail.com</i>
Розміщення курсу	<i>Google-disk</i>

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

**Предмет навчальної дисципліни.** Теорія керування – це наука про принципи й методи спрямування функцій різних систем, процесів та об'єктів. Її сутність полягає в побудові математичної моделі об'єкта керування на основі його системного аналізу та в синтезі алгоритму для досягнення бажаних характеристик функціонування або цілей керування. Теорія оптимального керування відшукує шляхи досягнення цілей керування оптимальним чином.

У даний час ця теорія слугує єдиною науковою основою розв'язування задач керування динамічними системами різної природи (фізичної, хімічної, біологічної та соціальної тощо) на базі розвинених математичних методів їх дослідження, зокрема їх аналізу та синтезу. Сучасна теорія керування є послідовницею кібернетики, науки що вивчає управління різноманітними системами живої та неживої природи на основі принципу зворотного зв'язку. Теорія керування має глибокі зв'язки з теорією нейронних мереж.

#### Мета курсу:

- навчити аналізувати загальну структуру систем керування;
- навчити будувати математичні моделі систем керування;
- забезпечувати використання відповідних методів пошуку оптимальних керувань;
- виконувати необхідні обрахунки при аналізі та синтезі (конструюванні) систем керування.

**Результати навчання:** спроможність будувати моделі динамічних систем у вигляді диференційних або ітеративних рівнянь та систем рівнянь, ідентифікувати ці моделі на даних,

будувати критерії їх оптимального функціонування, знаходити стратегії оптимального керування, чисельно розв'язувати задачі оптимального керування, здатність розв'язувати професійні задачі проектування керованих технічних систем, в тому числі автономних керованих систем (роботів, дронів) в програмних середовищах математичного моделювання (Matlab, Octava, Scilab і т.і.).

**Зокрема, результатом навчання є знання:**

- методів системного аналізу систем керування,
- основних типів математичних моделей систем керування,
- принципів побудови систем оптимального керування,
- методів дослідження стійкості системи керування,
- методики створення оптимальних систем керування,
- аналітичних та числових методів пошуку оптимальних керувань,
- сучасних комп'ютерних засобів та прикладного програмного забезпечення для моделювання, оптимізації та дослідження систем керування;

**уміння:**

- аналізувати структуру систем керування,
- складати диференціальні та рекурентні рівняння, що описують системи керування,
- оцінювати стійкість та якість функціонування системи керування,
- знаходити оптимальні керування,
- застосовувати сучасне прикладне програмне забезпечення для моделювання, оптимізації та дослідження систем керування.

**досвід:**

- побудови математичної та комп'ютерної моделі системи керування,
- визначення стійкості системи керування,
- підрахунку основних характеристик системи,
- знаходження оптимальних керувань,
- застосування розглянутих методів та прикладного програмного забезпечення при вирішенні практичних задач.

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

**Вимоги до початку вивчення.** Базові знання з дисциплін: математичний аналіз, лінійна алгебра, диференціальні рівняння, теорія функцій комплексної змінної, методи оптимізації, числові методи, алгоритми і системи комп'ютерної математики, програмування.

Теорія керування, зокрема теорія оптимального керування є інтегруючою дисципліною, що завершує бакалаврський рівень навчання по прикладній математиці.

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

### **Розділ 0. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ**

Тема 1.1. Загальні проблеми управління. Кібернетика: Минуле, сьогодення, майбутнє.

Тема 1.2. Математичні моделі керованих систем.

### **Розділ 2. ТЕОРІЯ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ.**

### **Розділ 3. ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ.**

Тема 3.1. Задачі оптимального керування.

Тема 3.2. Принцип максимуму Понтрягіна.

Тема 3.3. Метод динамічного програмування Беллмана.

### **Розділ 3. ДОДАТКОВІ ГЛАВИ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ.**

Тема 3.1. Теорія стійкості систем керування.

Тема 3.2. Керування в умовах невизначеності.

Тема 3.3. Глибокі нейронні мережі як динамічні системи.

#### 4. Навчальні матеріали та ресурси

##### Рекомендована література

##### Базова література

1. Пічкур В.В. Лекції з теорії керування. Київ: КНУ ім. Т.Шевченка, 2017. 232 с. [http://mss.unicyb.kiev.ua/manuals/Lectons\\_control\\_theory.pdf](http://mss.unicyb.kiev.ua/manuals/Lectons_control_theory.pdf)
2. Новицький І.В. Сучасна теорія керування: навч. посіб. / І.В. Новицький, С.А. Ус. Мін-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Дніпро : НГУ, 2017. – 263 с.
3. Моклячук, М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. – 380 с. <http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/mmp/var-Book-2010.pdf>
4. Paluszek M., Thomas S. MATLAB Machine Learning Recipes: A Problem-Solution Approach. 2nd ed. Apress, 2019.
5. Конспект лекцій.

##### Допоміжна література

1. Перестюк М.О. Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. Київ: КНУ ім. Т.Шевченка, 2010. 121 с. [http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/var\\_chisl.pdf](http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/var_chisl.pdf)
2. Башняков О.М., Пічкур В,В, Задача синтезу в теорії керування: Навчальний посібник, - К,: Вид-во "Сталь", 2012, - 116 с. <http://www.cyb.univ.kiev.ua/library/books/bashniakov-19.pdf>
3. Peregudov F., Tarasenko F. Introduction to Systems Analysis. – OH: Columbus: Glen-coe/Mcgraw-Hill, 1993. – 320 p. [http://systems-analysis.ru/assets/systems\\_analysis\\_peregudov.pdf](http://systems-analysis.ru/assets/systems_analysis_peregudov.pdf)
4. Schmidli H. Stochastic control in insurance. – London: Springer-Verlag, 2008. – 254 p.

### Навчальний контент

#### 5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

##### Розділ 0. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ

**Тема 1.1. Загальні проблеми управління. Кібернетика: Минуле, сьогодні, майбутнє.**

**Лекція 1.** Методологія управління. Кібернетика 2.0. Управління системами міждисциплінарної природи. Управління і штучний інтелект.

Література: Peregudov, Tarasenko (1993).

**Тема 1.2. Математичні моделі керованих систем**

**Лекція 2.** Предмет, історія, розділи і основні поняття теорії керування. Моделі систем керування: системи «вхід-вихід»; лінійні стаціонарні системи; лінійні дискретні моделі; моделі у вигляді диференціальних рівнянь та систем рівнянь. Види керувань. Зворотній зв'язок. Ітераційні моделі. Керованість. Спостережуваність. Приклади (модель Леонт'єва).

Література: Пічкур (2017, лекція 1), Новицький (2017).

##### Розділ 2. ТЕОРІЯ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ.

**Лекція 3.** Задачі варіаційного числення. Варіаційна похідна за Фреше та Гато. Необхідні умови оптимальності. Рівняння Ейлера. Граничні умови (трансверсальності). Задачі з обмеженнями. Ізопериметричні задачі. Метод Лагранжа.

Література: Пічкур (2017, лекція 5), Моклячук (2009, розділ 5), Васильєв (2002, §8.3).

##### Розділ 3. ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ.

### **Тема 3.1. Задачі оптимального керування**

**Лекція 3.** Задачі оптимального керування. Задачі Майєра, Лагранжа, Больца, зв'язок між ними. Задача швидкодії. Моделі з дискретним часом. Зв'язок з задачами варіаційного числення. Обчислення градієнтів цільового функціоналу в задачі з вільним кінцем.

Література: Моклякчук (2009), Пічкур (2017).

### **Тема 2.2. Принцип максимуму Понтрягіна.**

**Лекція 4.** Задачі оптимального керування з обмеженнями на керування. Функціонал Лагранжа. Сідлові точки. Функція Гамільтона-Понтрягіна. Необхідні умови оптимальності. Рівняння Ейлера. Принцип максимуму Понтрягіна. Канонічні рівняння Гамільтона-Якобі. Обґрунтування принципу максимуму. Дискретний принцип максимуму.

Література: Пічкур (2017, лекція 6), Моклякчук (2009, розділ 15).

**Лекція 5.** Застосування принципу максимуму. Приклади. Розв'язання задачі швидкодії.

Література: Моклякчук (2009, розділ 15).

**Лекція 6.** Числові методи оптимального керування. Дискретизація задач. Метод послідовних наближень. Методи математичного програмування. Метод стохастичних градієнтів.

Література: Конспект лекцій.

### **Тема 2.3. Метод динамічного програмування Беллмана**

**Лекція 7.** Метод динамічного програмування в дискретному часі. Функція та рівняння Беллмана. Мережеві графіки.

Література: Пічкур (2017, лекція 10).

**Лекція 8.** Метод динамічного програмування у неперервному часі. Функція та рівняння Беллмана.

Література: Пічкур (2017, лекція 11), Моклякчук (2009, розділ 16).

## **Розділ 3. ДОДАТКОВІ ГЛАВИ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ**

### **Тема 3.1. Теорія стійкості систем керування**

**Лекція 9.** Теорія стійкості систем керування: стійкість лінійних систем керування; стійкість за Ляпуновим, функції Ляпунова.

Література: Конспект лекцій.

### **Тема 3.2. Керування в умовах невизначеності**

**Лекція 10.** Керування системами з неповними даними. Стохастичне керування. Фільтр Калмана-Бюсі. Робастне керування.

Література: Пічкур (2017, лекція 15).

**Лекція 11.** Задачі оптимального керування в економіці, фінансовій та страховій математиці. Векторні задачі оптимального керування.

Література: Schmid1i (2008).

## **ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ.**

1. Моделі систем керування: системи «вхід-вихід»; лінійні стаціонарні системи; лінійні дискретні моделі; моделі у вигляді диференційних рівнянь та систем рівнянь.
2. Моделі систем керування: складання диференційних рівнянь типових та довільних ланок систем керування.
3. Теорія оптимального керування: класичні задачі оптимального керування, варіаційне числення, рівняння Ейлера.
4. Теорія оптимального керування: розв'язання прикладних задач варіаційного числення.
5. Теорія оптимального керування: дискретний метод динамічного програмування, розв'язання динамічних задач на графах.

6. Теорія оптимального керування: метод динамічного програмування у неперервному часі, диференційне рівняння Беллмана, граничні умови.
7. Теорія оптимального керування: методика застосування принципу максимуму Понтрягіна на конкретних прикладах.
8. Теорія оптимального керування: розв'язання задачі швидкодії.

#### **Теми лабораторних робіт**

1. Задача оптимальної оптимального перехоплення цілі, що втікає.
2. Задача оптимальної навігації яхти.
3. Математичне моделювання та оптимальне керування епідемічними процесами.
4. Аналітичне, числове та комп'ютерне розв'язання задач варіаційного числення.

#### **6. Самостійна робота студента/аспіранта**

**Самостійна робота** полягає в опрацюванні матеріалів лекцій, підготовці до контрольних робіт, а також у виконанні домашніх та лабораторних робіт, програмних проектів та ін.

Основні завдання самостійних занять: закріплення студентами на практиці знань, здобутих ними під час лекцій.

#### **Види самостійної роботи:**

виконання лабораторних робіт;

виконання практичних завдань самостійної домашньої роботи з тематики курсу;

реферування науково-технічної літератури з тематики курсу;

написання реферату;

виконання програмних проектів з тематики курсу.

### **Політика та контроль**

#### **7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)**

В разі об'єктивної неможливості бути присутнім на більшості лекцій, наприклад, в разі паралельного навчання за кордоном або повної зайнятості на роботі, студент повинен виконати контрольні, домашні та лабораторні роботи, або програмний проект за тематикою дисципліни у встановлені строки. У разі запізнення зі здачею робіт можуть бути нараховані штрафні бали. Звіти з виконаних робіт надсилаються викладачу засобами електронного зв'язку (Slack, e-mail).

#### **Вимоги до рефератів**

- 1) Тема повинна бути узгоджена з викладачем (за e-mail).
- 2) Реферат повинен бути на українській або англійській мові.
- 3) Об'єм 15-30 стор.
- 4) Структура реферату: Титульний лист, зміст, текст, висновки, список джерел.
- 5) Теж саме стосується структури презентації.
- 6) Список використаних джерел є обов'язковим (в тому числі і в презентації).
- 7) В тексті повинні бути посилання на джерела.
- 8) Складні доповіді можуть готуватися командою з 2-3 студентів.
- 9) За гарну та ясну доповідь – до 20 балів (за «прості» доповіді - на всіх, за «складні» - кожному).
- 10) Доповідь оголошується завчасно. Презентація попередньо виставляється у Slack (або інший доступний депозитарій). На одній парі може бути декілька доповідей.

#### **Вимоги до лабораторних робіт та учбових програмних проектів**

- 1) Результати роботи повинні бути оформлені у вигляд короткого звіту (на українській або англійській мові).

- 2) Структура звіту: титульний лист (назва, автори, і т.і.), анотація, теоретичні відомості, завдання, метод(и) вирішення, результати (проілюстровані), висновки, посилання, додатки (лістинг і т.і.).
- 3) Можливий варіант звіту у вигляді короткої презентації (з тією же структурою, що у п.2).

### **Вимоги до дослідницьких програмних проектів**

- 1) Тема проекту має бути обґрунтована та узгоджена з викладачем.
- 2) Проект має програмно реалізувати деяку модель (явища, об'єкту, системи) типу «вхід-вихід» з поясненням, що є входом, а що є виходом програми.
- 3) Інший формат проекту (не «вхід-вихід») має бути дуже добре обґрунтований.
- 4) Проект повинен вирішувати проблему ідентифікації параметрів моделі.
- 5) Проект повинен вирішувати або задачу симуляції деякого явища (об'єкту, системи), або задачу підтримки рішень відносно об'єкту або системи.
- 6) Програмна реалізація повинна включати дружній інтерфейс.
- 7) Бажано, щоб програма була закінченим продуктом, тобто працювала незалежно від системи програмування (stand-alone application, або в браузері).
- 8) Повинен бути опис програми (help) із зазначенням авторів проекту та їх ролей у реалізації.
- 9) Код повинен бути відкритим, а програма – у вільному доступі.
- 10) Команда може включати не більше трьох учасників.
- 11) Результати роботи повинні бути оформлені у вигляді короткого звіту (на українській або англійській мові).
- 12) Структура звіту: титульний лист (назва, автори, і т.і.), анотація, теоретичні відомості, завдання, метод(и) вирішення, результати (проілюстровані), висновки, посилання, додатки.
- 13) Повинна бути підготована презентація за проектом.

## **8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)**

*Поточний контроль: МКР, письмовий тест, колоквиум (до 15 балів).*

*Календарний контроль: провадиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.*

*Семестровий контроль: залік (до 25 балів).*

*Умови допуску до семестрового контролю: виконання контрольних робіт (до 15 балів), зарахування домашніх та лабораторних робіт (в сумі до 60 балів), семестровий рейтинг для допуску до заліку - більше 40 балів.*

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

## **9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)**

- *Короткий перелік питань, які виносяться на колоквиум (додаток 1 до силабусу);*
- *Розширений перелік питань, які виносяться на семестровий контроль (додаток 2 до силабусу);*
- *можливо зарахування сертифікатів проходження дистанційних чи онлайн курсів за відповідною тематикою (теорія оптимізації, дослідження операцій, теорія керування, теорія автоматичного регулювання);*
- *можливо зарахування рефератів з теорії та застосувань теорії оптимального керування;*

- *можливо виконання учбових або дослідницьких програмних проєктів, що використовують результати теорії оптимального керування або теорії оптимізації.*

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено:** професор, доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. Норкін Володимир Іванович.

**Ухвалено** кафедрою прикладної математики (протокол № 7 від 09.02.2022).

**Погоджено** Методичною комісією факультету (протокол № 6 від 25.03.2022).