

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КІЇВСЬКИЙ ПОЛТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»**

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

«На правах рукопису»
УДК 519.63: 536.25: 532.5

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
О. Р. Чертов
«___» 2016 р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра**

зі спеціальності 8.04030101 «Прикладна математика»

на тему: Обчислювальні схеми на основі методу Гальоркіна для моделювання дрібномасштабних коливань у циліндричних плазмових шнурах

Виконала: студентка II курсу, групи КМ-41м

Цвірчкова Анна Олександрівна

Науковий керівник Зав. кафедрою, д. т. н., доцент
Чертов О. Р.

Консультант зі спеціальних питань с. н. с., канд. техн. наук
Сальников М. М.

Консультант зі спеціальних питань ст. викладач, канд. техн. наук
Сірик С. В.

Консультант із нормоконтролю старший викладач

Мальчиков В. В.

Рецензент проф., д. т. н., проф.
Панкратова Н. Д.

Засвідчую, що в цій магістерській дисертації немає запозичень із праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____

Київ — 2016

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)

Спеціальність 8.04030101 «Прикладна математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О. Р. Чертов

«___» _____ 2016 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Цвірчковій Анні Олександрівні

1. Тема дисертації: «Обчислювальні схеми на основі методу Гальоркіна для моделювання дрібномасштабних коливань у циліндричних плазмових шнурах»,
Науковий керівник дисертації Чертов Олег Романович, д. т. н., доцент,
Затверджені наказом по університету від “21” березня 2016 р. № 1187-С.

2. Термін подання студентом дисертації: “17” червня 2016 р.

3. Об’єкт дослідження: коливальні процеси у плазмових шнурах

4. Предмет дослідження: обчислювальні методи для розв’язання диференційних рівнянь.

5. Перелік задач, які мають бути вирішенні:

- Провести аналіз коливальних процесів, що відбуваються у циліндричних магнітних шнурах. Дослідити математичні моделі, що описують поширення магнітогідродинамічних хвиль у циліндричній геометрії.
- Провести огляд та аналіз математичних методів чисельного інтегрування рівнянь типу конвекції-дифузії-реакції.

- Розробити стійкі чисельні схеми для рівняння поширення дрібномасшабних коливань у плазмі та дослідити їх властивості.
- Запропонувати реалізацію комп’ютерного моделювання коливальних процесів у космічній плазмі, розробити відповідне математичне та програмне забезпечення.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу:

- Приклад коронарних петель на Сонці.
- Схеми циліндричного плазмового шнуря.
- Графіки результатів.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

- Тези «Обчислювальні схеми на базі проекційного підходу Гальоркіна для розв’язання задач на власні значення для хвильових рівнянь зі змінною густинною», тези «Коррекция и Фурье-анализ конечноэлементных стабилизованных вычислительных схем при использовании технологии mass lumping»

8. Консультанти розділів дисертації:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Розділ 1. Математичні моделі поширення збурень у плазмі та методи їх чисельного моделювання	Сальников М. М. старший науковий співробітник		
Розділ 2. Обчислювальні схеми для чисельного моделювання поширення збурень у плазмі	Сірик С. В. старший викладач		

9. Дата видачі завдання: «2» березня 2016 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Грунтовне ознайомлення з предметною областю	15.12.2014	
2	Огляд та аналіз математичних методів	01.03.2015	
3	Розробка чисельних схем для розв'язання задачі	10.03.2016	
4	Аналіз розроблених схем, проведення наукового дослідження з метою пошуку шляхів покращення властивостей чисельних схем	10.03.2016	
5	Робота над статтею за результатами наукового дослідження	10.03.2016	
6	Оформлення текстової і графічної частин магістерської дисертації	25.05.2016	

Науковий керівник

О.Р. Чертов

Завдання прийняв до виконання

А. О. Цвірчкова



РЕФЕРАТ

Дисертацію виконано на 77 аркушах, вона містить 2 додатки та перелік посилань на використані джерела з 32 найменувань. У роботі наведено 15 рисунків та 2 таблиці.

Актуальність теми. Ідею впливу «космічної погоди» (КП), або сонячної активності на живий і неживий світ Землі вперше висловив А. Л. Чижевський на початку ХХ ст. У подальшому було з'ясовано роль сонячних плям і спалахів, досліджено потік жорсткого сонячного випромінювання, динаміку космічної радіації, відкрито потік гарячої плазми величезної швидкості із Сонця, вивчено магнітну оболонку Землі. У наш час вивчення і прогнозування КП є важливою галуззю науки, оскільки такі явища як збурення магнітного поля, корональні викиди маси та ін., призводять до проблем у роботі космічних апаратів та навіть їх втрати. У роботі розглядається явище, яке має місце у таких структурах, як корональні петлі (вони виникають унаслідок енерговиділення та нагріву сонячної корони). Поперечні розміри петель є невеликими у порівнянні з їх довжиною, отже, нехтуючи їх кривизною, локально можна моделювати петлі циліндричними магнітними трубками.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась згідно з планом науково-дослідних робіт кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка чисельних схем для моделювання коливань у циліндричному плазмовому шнурі круглого перерізу з гвинтовим магнітним полем.

Для досягнення вказаної мети було розв'язано такі задачі:

- проведено огляд та аналіз фізичних процесів та відповідних їм математичних моделей;
- розроблено чисельні схеми для розв'язку обраної моделі, досліджено їх властивості;

- розроблено відповідне математичне та програмне забезпечення, проведена серія експериментів, проаналізовані отримані результати.

Об'єктом дослідження є процес поширення коливань у циліндричному плазмовому шнурі.

Предметом дослідження є чисельні методи розв'язку диференційних рівнянь, що описують відповідний фізичний процес.

Методи дослідження. Для розв'язання поставленої задачі використано чисельні методи математичної фізики, а саме модифікація методу Петрова-Гальоркіна.

Наукова новизна одержаних результатів складається з наступних положень:

- вперше запропоновано обчислювальні схеми для рівнянь коливань (спеціалізованого виду) в циліндричних плазмових шнурах;
- запропоновано вибір стабілізуючих параметрів у методі Петрова-Гальоркіна з кусково-квадратичними ваговими функціями для рівнянь конвекції-дифузії-реакції з домінуючою конвекцією;
- удосконалено обчислювальні схеми методу Петрова-Гальоркіна для систем рівнянь магнітної гідродинаміки в адіабатичному наближенні.

Практичне значення одержаних результатів. Необхідність чисельного моделювання описаного фізичного процесу виникла в Інституті космічних досліджень НАН України та ДКА України (ІКД НАНУ-ДКАУ). Розроблене програмне та математичне забезпечення та отримані результати призначенні для використання у цьому закладі.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати роботи представлено на конференції «Прикладна математика та комп’ютинг – ПМК’2016», а також на Міжнародних конференціях SAIT 2016 «System Analysis and Information Technologies» та Third UK-Ukraine-Spain Meeting on Solar Physics and Space Science conference.

Публікації. Результати дисертації викладено у 3 публікаціях у тезах наукових конференцій: «Обчислювальні схеми на базі проекційного підходу Гальоркіна для розв'язання задач на власні значення для хвильових рівнянь зі змінною густиновою»

(ПМК 2016), «Коррекция и Фурье-анализ конечноэлементных стабилизованных вычислительных схем при использовании технологии mass lumping» (SAIT 2016), «Spatio-temporal MHD-structures reconstruction on example of the CFL wave disturbances in magnetosphere» (Solar physics 2015).

Ключові слова. МГД-коливання, плазма, альвенівські хвилі, метод Петрова-Гальоркіна, методи скінченних елементів.



ABSTRACT

The thesis is presented in 77 pages. It contains 2 appendixes and bibliography of 32 references. 15 figures and 2 tables are given in the thesis.

Topic relevance. The idea of the impact of "space weather" (SW), or solar activity on the living and inanimate world of Earth was first expressed by A. Chizhevsky in the beginning of the XX century. Later the investigation of sunspots and flares, hard stream of solar radiation, cosmic radiation dynamics began; flow of hot plasma with high speed from the Sun was discovered, and the magnetic shell of the Earth was studied. Nowadays, the study and prediction of SW is an important branch of science because such phenomena as disturbances of the magnetic field, coronal mass ejection etc., cause problems in the spacecrafts operation and even their loss. Here we consider the phenomena that occurs in structures such as coronal loops (which arise from energy and heating of the solar corona). The transverse dimensions of the loops are small compared to their length, thus neglecting their curvature, the loops can modelled locally by magnetic cylindrical tubes.

Thesis connection to scientific programs, plans, and topics. The thesis was prepared according to the scientific research plan of the Applied Mathematics Department of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute."

Research goal and objectives. The aim of the thesis is to develop numerical schemes for modeling plasma oscillations in a cylindrical filament of round section with spiral magnetic field.

To achieve the above stated goal the following problems were solved:

- The review and analysis of the physical processes and the corresponding mathematical models was done.
- Numerical schemes for the solution to the chosen model were developed, and their properties were investigated.
- Appropriate mathematical support and software were developed, a series of experiments to analyze the results was accomplished.

Object of research is the process of spreading oscillations in a cylindrical plasma filament.

Subject of research is numerical methods for solving differential equations describing the appropriate physical process.

Methods of research. To solve the task numerical methods of mathematical physics were used, namely modification of Petrov-Galerkin method.

Scientific contribution of the results includes the following points:

- First computational schemes for the equation of oscillations (specialized format) in plasma filament were proposed.
- Selection of parameters in stabilizing Petrov-Galerkin method with piecewise quadratic weighting functions for convection-diffusion-reaction equations with dominant convection was proposed.
- Petrov-Galerkin method computational schemes for equations of magnetic hydrodynamics in the adiabatic approximation were improved.

Practical value of obtained results. The need for numerical simulation of described physical process originated in the Space Research Institute of NAS of Ukraine and Ukraine DKA (ISR NANU-SSAU). The developed software and mathematical support and the results are meant for use in this institution.

Approbation of the thesis results. The main points of the thesis were presented at the conference "Applied mathematics and computing - PMK'2016" as well as the International Conference SAIT 2016 «System Analysis and Information Technologies».

Publications. The results of the thesis were expounded in 3 theses publications for scientific conferences: "Computational schemes based on projection Galerkin approach for solving problems on eigenvalues for wave equations with variable density" (PMK 2016), "Correction and Fourier-analysis finite element stabilized computational schemes using mass lumping" (SAIT 2016), "Spatio-temporal MHD-structures reconstruction on example of the UFL wave disturbances in magnetosphere" (Solar physics 2015).

Keywords. MHD fluctuations, plasma, Alfvén waves, Petrov-Galerkin method, finite element method.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	11
ВСТУП.....	12
1 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ ЗБУРЕНЬ У ПЛАЗМІ ТА МЕТОДИ ЇХ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....	16
1.1 Фізична суть та математичні моделі поширення збурень у плазмі	16
1.2. Аналіз підходів до моделювання задач фізики плазми	23
1.3 Методи чисельного моделювання та їх аналіз	28
1.4 Висновки.....	33
2 ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СХЕМИ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЗБУРЕНЬ У ПЛАЗМІ.....	34
2.1 Поперечно-дрібномасштабні коливання в циліндричних плазмових шнурах	34
2.2 Побудова обчислювальних схем.....	42
2.3 Висновки.....	62
3 ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ	63
3.1 Структура програмного забезпечення.....	63
3.2 Порівняння похибок обчислень при різних значеннях стабілізуючих параметрах.....	65
3.3 Обчислення коливань плазми у циліндричному шнурі	65
3.4 Випробування схеми на адекватність.....	68
3.5 Висновки.....	72
ВИСНОВКИ	73
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	75
Додаток А	78
Додаток Б.....	82

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

- ЗДР — звичайне диференціальне рівняння;
КВМ — корональний викид маси;
МГД — магнітна гідродинаміка, магнітогідродинамічний;
МПЗ — магнітне поле Землі;
МСЕ — метод скінченних елементів;
СЗДР — система звичайних диференціальних рівнянь;
ЦПШ — циліндричний плазмовий шнур;



ВСТУП

Переважна більшість задач фізики плазми включає в себе різноманітні нелінійні явища та процеси, що розподілені у просторі та часі (коєфіцієнти у відповідних математичних моделях залежні від часової та просторових змінних), динаміку яких навіть у найпростіших випадках важко чи й зовсім неможливо дослідити аналітично (розв'язки відповідних математичних моделей не можуть бути знайдені аналітично, або ж вони описуються нескінченими рядами, для яких важко відшукати асимптотики) [1-6]. Однак, задачі фізики плазми відіграють важливу роль у наукових галузях високих технологій спеціалізованого виробництва, моделювання і проектування складних технічних і технологічних систем [1]. Так, наприклад, останнім часом великого значення набув прогноз «космічної погоди», під яким в широкому сенсі розуміють прогноз збурень магнітного поля Землі (МПЗ), спричинених космічними явищами [2]. Основними джерелами збурень в навколоземному просторі є активні процеси на Сонці [7-8]. Сильні збурення МПЗ (так звані «магнітні бурі»), викликані рентгенівським та гамма- випромінюванням, потоками високоенергетичних частинок, що рухаються в напрямі від Сонця до магнітосфери Землі, а також потоками іонізованої плазми («сонячним вітром»), що рухається з гіперзвуковою швидкістю (в середньому 400-600 км/с), істотно впливають на функціонування фізіологічних систем людини, особливо серцево-судинної та нервової систем [2, 8]. Магнітні бурі негативно впливають на роботу космічних апаратів та пристрій, що знаходяться на орбіті, а також наземних технічних пристрій та конструкцій, що мають властивості провідників та займають значні площини земної поверхні. До таких об'єктів, в особливості, відносяться електричні силові лінії, нафтота газопроводи, системи навігації тощо. Прогноз стану МПЗ можливий за даними супутникового спостереження Сонця за допомогою глобального чисельного моделювання фізичних процесів у сонячній короні, сонячному вітрі та магнітосфері Землі. В такому випадку задача зводиться до розв'язання нелінійних багатовимірних систем рівнянь в частинних похідних, систем рівнянь магнітної гідродинаміки (МГД),

що описують еволюцію усіх процесів у космічному середовищі. Проте, таке моделювання у реальному часі перш за все потребує надзвичайно потужних обчислювальних ресурсів та знання поточної оперативної інформації про значення краївих умов. На даний час не існує технічних можливостей для забезпечення цієї умови, це пов'язано, в тому числі, і з недостатньою кількістю супутників та вимірювальних приладів, необхідних для отримання потрібної кількості даних для проведення розрахунків. Разом з тим, роботи по створенню програм здійснення глобального математичного моделювання процесів взаємодії типу «Сонце–Земля» інтенсивно ведуться в світі, і в даний момент є деякі відомості про створення таких програм [5, 9].

Принциповою перешкодою на шляху до використання згаданих глобальних моделей МГД та глобального моделювання є велика складність відповідних систем рівнянь і практична відсутність стійких, ефективних та дешевих в обчислювальному плані чисельних алгоритмів інтегрування таких систем. Математично динаміка плазми у першому наближенні описується системою рівнянь МГД, що є нелінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних. Рівняння МГД допускають негладкі та розривні розв'язки, що відповідають ударним хвилям, які внаслідок нелінійності та конвективних процесів (процесів переносу) можуть виникати навіть при дуже гладких початкових та краївих умовах [10]. Врахування конвективних процесів зводиться до включення в систему частинних похідних першого порядку по просторовим змінним, що робить задачу несамоспряжену, і є перешкодою для багатьох ефективних чисельних методів (наприклад, варіаційних методів Рітца та Треффца) [10, 11]. Крім того, плазма рухається з надзвичайно великою швидкістю при малості (а інколи, й практично повній відсутності) дисипативних процесів (таких як, наприклад, гідродинамічна в'язкість). Це призводить до того, що системи МГД є системами з домінуючими конвективними членами та малими коефіцієнтами при старших похідних (що відповідають різноманітним дисипативним та дисперсивним процесам). Такі задачі відносяться до класу так званих *сингулярних* краївих задач [12], їх розв'язки відповідають швидкоплинним процесам і можуть стрибкоподібно змінюватись на тонких переходних шарах (областях ущільнення ударної хвилі), що

практично унеможливлює розв'язання таких задач класичними чисельними методами. Внаслідок цього, конструктування адекватних стійких обчислювальних схем та чисельних методів розв'язання систем МГД є важливою задачею [13]. В роботі здійснена спроба побудови відповідних обчислювальних схем на основі методу (підходу) скінчених елементів (МСЕ) і використання адаптивних вагових функцій для стабілізації розв'язків схем.

Для забезпечення можливості проведення розрахунків задач фізики плазми у переважній більшості випадків замість вихідних загальних (універсальних) нелінійних моделей, записаних у вигляді систем МГД рівнянь, використовують дещо спрощені або ж специфіковані (під ті чи інші конкретні випадки) математичні моделі. Ці моделі отримуються з вихідних МГД рівнянь шляхом врахування особливостей конкретних задач, певних перетворень та/або спрощень (таких як лінеаризація, усереднення тощо), коректність та адекватність яких (в сенсі їх точності та відповідності фізичним явищам, що моделюються) встановлюється теоретичною фізикою плазми [1-3]. Однією з найбільш вживаних та точних моделей є моделі типу "циліндричний плазмовий шнур" (ЦПШ). Циліндричний плазмовий шнур круглого перерізу з гвинтовим магнітним полем є зручною моделлю для експериментального і теоретичного дослідження різних МГД збурень. Така модель протягом тривалого часу слугує об'єктом досліджень у фізиці космічної та високотемпературної плазми. Ця геометрія також часто використовується при вивчені фундаментальних проблем фізики плазми [7, 14], і в особливості, у дослідженнях коливань плазми навколо магнітних ліній Землі. Слід відмітити, що незважаючи на значну роботу по теоретичному дослідженю поведінки плазми в циліндричній геометрії, багато питань, як і раніше, все ще залишаються нез'ясованими. Частково це пов'язано з тією обставиною, що для вивчення коливань у зазначеній геометрії зазвичай використовується рівняння Хайна-Люста або його модифікації, що є доволі складними, і розв'язання цих рівнянь наштовхується на істотні математичні труднощі. У роботі отримано рівняння малих коливань, яке істотно простіше в порівнянні зі стандартним видом рівняння Хайна-Люста та продемонстровано, що отримане рівняння призводить до низьких добре відомих результатів (і показано, що це рівняння

може бути отримано з рівняння Хайна-Люста після деяких нетривіальних математичних перетворень). Виведене рівняння дозволяє досліджувати поперечно-дрібномасштабні збурення плазми, які в ряді випадків призводять до нестійкості типу жолобкових і балонних мод (що грають важливу роль у фізиці плазми) та вивчати умови поширення і стійкості поперечно-дрібномасштабних збурень з безперервним спектром у неоднорідних плазмових шнурах. У даній роботі для моделювання коливань у циліндричних плазмових шнурах використовується, в тому числі, й згадане рівняння роботи [14].

Варто відзначити, що чисельні методи інтегрування задач математичної фізики останнім часом переживають стадію бурхливого розвитку (причому, відповідно до розвитку обчислювальної техніки, спостерігається тенденція до розгляду все більш складних та повних нелінійних моделей фізичних явищ) [15]. Чисельні методи також відіграють важливу роль в задачах оцінювання та спостереження станів систем з розподіленими параметрами, що виникають при вивченні динаміки хвильових процесів, оскільки практична реалізація алгоритмів оцінювання станів пов'язана з необхідністю чисельного розв'язання рівнянь в частинних похідних, наприклад, з дискретизацією цих рівнянь по просторовим змінним. Одним з найбільш універсальних та найпотужніших (в плані оптимальності швидкості збіжності відповідних чисельних процесів) є згаданий вище МСЕ у формі проекційних підходів Гальоркіна чи Петрова-Гальоркіна [10, 12, 16, 17]. МСЕ з успіхом застосовується як для розв'язання початково-крайових задач для нестационарних рівнянь чи крайових задач для стационарних рівнянь, так і для розв'язання задач на власні значення.

У представлений роботі побудовано обчислювальні схеми на основі узагальненого скінченноелементного проекційного підходу Гальоркіна для чисельного моделювання задач фізики плазми (в особливості, задач чисельного моделювання дрібномасштабних коливань у циліндричних плазмових шнурах).

1 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ ЗБУРЕНЬ У ПЛАЗМІ ТА МЕТОДИ ЇХ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Фізична суть та математичні моделі поширення збурень у плазмі

Система МГД-рівнянь описує явище розповсюдження нелінійних ударних хвиль в неоднорідній плазмі (у першому наближенні), і є комбінацією системи рівнянь гідродинаміки і рівнянь Максвела. Нижче приведено вивід системи МГД-рівнянь [1, 18, 19].

Вишищемо систему рівнянь гідродинаміки в ейлерових координатах, припускаючи адіабатичність розглядуваних процесів, що є цілком віправданим для реальних процесів розповсюдження сонячного вітру:

рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.1)$$

рівняння Нав'є-Стокса з врахуванням сили Лоренца та сили гравітації

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{F} + \nu \Delta \vec{u}, \quad (1.2)$$

і як наслідок, з рівняння стану газу та припущення про адіабатичність процесів, отримуємо рівняння для тиску

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.3)$$

Тут ρ – щільність середовища, p – тиск, \vec{u} – вектор швидкості, \vec{B} – магнітне поле, ν – коефіцієнт в'язкості (у безрозмірній системі обернений до числа Рейнольдса) та \vec{F} – щільність сторонніх сил (наприклад, сила тяжіння тщо). Похідна $\partial / \partial t$ є похідною по часовій змінній t . Показник адіабати при протікання процесів на Сонці зазвичай приймають як $\gamma = 5/3$.

До рівнянь (1.1)–(1.3) додаються ще рівняння Максвела (запишемо їх в системі СІ):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}. \quad (1.6)$$

Тут \vec{j} – щільність струму, \vec{E} – напруженість електричного поля, μ_0 – магнітна проникливість вакууму. Зазначимо, що для космічної плазми вектор напруженості \vec{H} магнітного поля практично співпадає з вектором магнітної індукції \vec{B} , тому в наших викладках вони ототожнюються [8].

Для замикання системи (1.1)–(1.6) необхідно додати закон Ома, який у припущені нескінченної провідності плазми, що практично виконується для сонячної плазми та для більшості інших видів космічної плазми, виглядає так: $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$. Підставляючи даний вираз у рівняння (1.4), та використовуючи формули векторного аналізу, а також формулу (1.5), отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{u}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{u}) = \\ &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{u}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Підставляючи вираз (1.6) у рівняння руху (1.2), отримаємо:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \rho \vec{g} + v \Delta \vec{u}.$$

Тоді остаточно система у векторному вигляді записується так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{u}), \quad (1.10)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{F} + v \Delta \vec{u}. \quad (1.11)$$

Система (1.8)–(1.11) є системою рівнянь МГД в загальному вигляді, яка здатна описувати всю різноманітність явищ у космічній плазмі (у нерелятивістському наближенні). Взагалі, система рівнянь МГД може бути записана в різних формах, які на рівні диференційних рівнянь описують одне і те ж явище, проте при застосуванні тих чи інших чисельних методів надають певні переваги. Наприклад, для чисельних методів, що не забезпечують консервативності (див. наступний пункт), сама система диференціальних рівнянь повинна бути записана в дивергентному (консервативному) вигляді, інакше розрахунки будуть повністю хибними. Метод скінчених елементів, на якому базуватимуться наші подальші міркування, в значній мірі є нечутливим до вибору форми запису системи, що є однією з його ключових переваг.

З системи можна отримати як наслідок декілька корисних систем, що описують характерні випадки розповсюдження збурень. Нехай всі величини, що характеризують плазму, не залежать від однієї просторової координати, наприклад z , та не мають відповідного компонента у векторах. Тоді всі частинні похідні $\partial/\partial z = 0$, $\vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y + 0\vec{e}_z$, $\vec{u} = u_x(x, y)\vec{e}_x + u_y(x, y)\vec{e}_y + 0\vec{e}_z$. Нехай крім того вісь y правої системи координат направлена протилежно силі тяжіння. Описаний випадок може слугувати спрощеною моделлю розповсюдження збурень в площині від Сонця до магнітосфери. В координатному записі система виглядає так [17]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial u_y}{\partial y} - u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} - u_y \frac{\partial B_x}{\partial y}, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_y \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (1.15)$$

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0} B_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + F_x, \quad (1.16)$$

$$\rho \frac{\partial u_y}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mu_0} B_x \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + F_y. \quad (1.17)$$

Розглянемо тепер корисний випадок системи рівнянь МГД, в якій всі величини залежать від однієї просторової координати, наприклад, координати z . Тоді $\vec{u} = (u_x(t, z), u_y(t, z), u_z(t, z))$, $\vec{B} = (B_x(t, z), B_y(t, z), B_z(t, z))$, $\rho = \rho(t, z)$, $p = p(t, z)$. Цей випадок може описувати поширення хвиль при збуренні границі по якійсь із МГД величин, а також рух плазми у конфігураціях, що можуть бути описані однією просторовою координатою (наприклад, явище спікул [2]). Розписуючи в цьому випадку покомпонентно систему (1.8)–(1.11) та вважаючи, що $\vec{F} = \rho \vec{g}$ (сила тяжіння, направлена проти вісі Oy), отримуємо наступну систему:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_z \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \cdot p \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial z} B_z - B_x \frac{\partial u_z}{\partial z} - u_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial z} B_z - B_y \frac{\partial u_z}{\partial z} - u_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (1.22)$$

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \quad (1.23)$$

$$\rho \frac{\partial u_y}{\partial t} + \rho u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_y}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}, \quad (1.24)$$

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} \left(B_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \quad (1.25)$$

Також будемо розглядати нелінійне рівняння Бюргерса [1, 14], яке при спеціальному виборі краївих умов дозволяє отримати гарне наближення до реальних ударних хвиль в плазмі. Крім того, рівняння Бюргерса структурно схоже на рівняння із системи (1.8)–(1.11). Неважко побачити, що кожне з цих рівнянь має конвективну частину, що може бути представлена диференційним оператором $L_{\vec{u}} = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$, який в теорії диференціальних рівнянь прийнято називати похідною Лі. Похідна Лі співпадає з оператором диференціювання по часу, якщо припустити, що ми спостерігаємо за зміною МГД-величин в рухомому об'ємі, що рухається по траєкторії $\dot{\vec{x}} = \vec{u}(t, \vec{x})$. Така система відліку, асоційована з рухомим об'ємом, в механіці називається лагранжевою. В лагранжевій системі похідна Лі записується дуже просто – як звичайна похідна по часу. Велика кількість методів стабілізації схем базується на розщепленні оператора задачі на конвективний доданок (що співпаде з похідною Лі), та дисипативний доданок.

Цілком аналогічну структуру і властивості має рівняння Бюргерса. Добре відомо, що воно може описувати рух солітонів та кінків (біжучих хвиль, що не змінюють своєї форми). Загальне багатовимірне рівняння Бюргерса має вигляд (запис для векторного вигляду):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\lambda \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot (\kappa \nabla \vec{u}) + \vec{f}, \quad (1.26)$$

де $\vec{u}(t, \vec{x})$ – невідома (векторна) величина, $\lambda = \lambda(t, \vec{x})$ та $\vec{f}(t, \vec{x})$ – відомі функції, $\kappa(t, \vec{x}) > 0$ – тензор дифузії. В одновимірному вигляді рівняння Бюргерса (1.26) приймає вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial t} \right) + f.$$

У подальшому користуватимемось деякими властивостями розв'язків цього нелінійного рівняння.

Розглянемо тепер малі збурення в провідному стисливому середовищі з магнітним полем, що складається з сильного однорідного поля \vec{B}_0 та слабкого поля хвилі \vec{b} [20]. Газ в початковий момент є нерухомим з щільністю ρ_0 та тиском p . В ньому виникає (в початковий момент) невелике відхилення від середніх умов, так що $p = p_0 + p'$ і $\rho = \rho_0 + \rho'$, причому $p' \ll p$, $\rho' \ll \rho$. Швидкість газу \vec{u} також вважається малою. Стиснення будемо вважати адіабатичним, $p' = C^2 \rho'$ (де C – адіабатична швидкість звукових хвиль), дисипацію відсутньою. Тоді лінеаризована система рівнянь МГД (1.8)–(1.11) виглядає наступним чином:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}_0), \quad (1.27)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -C^2 \nabla \rho' + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{b}) \times \vec{B}_0. \quad (1.28)$$

Дана система є зручною моделлю для дослідження руху повільних, швидких та альвенівських хвиль у плазмі.

Для однозначного визначення розв'язку системи МГД-рівнянь (як і будь-якої системи диференційних рівнянь в частинних похідних), необхідно ще задати початкові та граничні умови. Саме вони дозволяють з безлічі можливих функцій, що формально задовольняють системі диференційних рівнянь, вибрати той розв'язок, що описує конкретне фізичне явище. Оскільки визначення реальних краївих умов для системи МГД наштовхується на описані раніше проблеми принципового характеру, то зазвичай в якості краївих умов задаються такі умови, що відповідають теоретичним уявленням про поведінку плазми [3].

Варто відзначити, що усі описані процеси належать до процесів типу конвективція-дифузія-реакція (КДР) [4, 16], суть чого полягає приблизно в наступному: КДР-процес є впорядкованою суперпозицією процесів, що умовно можна розділити на три групи — конвективну (процеси перенесення дисперсійного типу, тобто, без втрат енергії), та дифузійну і реакційну (останні дві групи включають

процеси дифузійного та реакційного розсіювання і є дисипативними процесами, тобто, із втратами енергії). Наведені вище (нелінійні) рівняння Бюргерса та МГД є природніми узагальненнями нестационарного (класичного) рівняння КДР виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\kappa \nabla u) - cu + f, \quad (1.29)$$

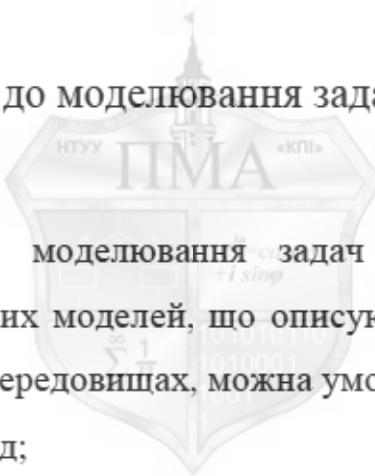
де $\vec{v}(t, \vec{x})$ — вектор швидкості перенесення (конвективна складова), $\kappa(t, \vec{x})$ — тензор дифузії (дифузійна складова), c — реакційний коефіцієнт. Це рівняння є дуже зручною та адекватною (досить точною) математичною моделлю для лінійних конвективно-дифузійних процесів (дрібномасштабних коливань, процесів лінійного переносу хвиль тощо). Відповідно до (1.29), математичною моделлю стаціонарного КДР процесу (процесу, що встановився, тобто, його залежністю від часу можна знехтувати) слугуватиме рівняння

$$\vec{v} \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\kappa \nabla u) + cu = f. \quad (1.30)$$

При дослідженні розв'язків рівнянь та методів їх наближеного пошуку корисно уявляти собі, як наявність тих чи інших членів у рівнянні (а також величина коефіцієнтів біля даних членів) впливає на поведінку та властивості розв'язку. Для з'ясування даного питання відносно рівняння КДР (1.29) використаємо метод гармонік та пошукаємо розв'язки (моди) у вигляді плоских гармонічних хвиль $u(t, x) = Ae^{ipx}e^{\omega t}$ (цього достатньо, оскільки майже довільний розв'язок можна подати у вигляді хвильового пакету таких мод), де $A \neq 0$ — деяка постійна, хвильове число $p \in R^1$, $\omega = \omega(p)$, а i — комплексна одиниця. Детальний аналіз цієї ситуації здійснено в праці [16]. Рівняння КДР при цьому будемо вважати одновимірним (одновимірність процесу не є принциповою і важлива лише з точки зору виявлення основних особливостей розв'язку в залежності від коефіцієнтів рівняння), однорідним, визначеним при $x \in R^1$ (задача Коші), а його коефіцієнти — постійними («замороженими»). Підставивши цей шаблон розв'язку у рівняння (1.29) та скоротивши на $Ae^{ipx}e^{\omega t}$, отримаємо $\omega(p) = -vpi - \kappa p^2 - c$. Значить, шуканий

розв'язок має вигляд $u(t, x) = Ae^{-(\kappa p^2 + c)t} e^{ip(x-vt)}$. Звідси бачимо, що при $\kappa p^2 + c > 0$ розв'язок буде затухаючим у часі; в особливості, це має місце при $\kappa \geq 0$ і $c \geq 0$ (причому, має місце хоча б одна строга нерівність) для мод з $p \neq 0$. Для затухання моди з $p = 0$ необхідно ѹ достатньо умови $c > 0$. Видно, що чим більше по величині дифузійний коефіцієнт κ та реакційний коефіцієнт c , тим сильніше затухає в часі розв'язок. При $\kappa > 0$ і $c < 0$ моди з $p^2 < -c/\kappa$ при $t \rightarrow +\infty$ необмежено зростають (нестійкі); аналогічна ситуація і для мод $p^2 > -c/\kappa$ при $\kappa < 0$ і $c > 0$. Нарешті, при $\kappa < 0$ і $c < 0$ всі моди (для довільних частот p) є нестійкими, а відповідні початково-крайові задачі для (1.29), як правило, є некоректними.

1.2. Аналіз підходів до моделювання задач фізики плазми



Взагалі, підходи до моделювання задач фізики плазми і, відповідно, конструювання математичних моделей, що описують розповсюдження МГД хвиль (різних типів) у провідних середовищах, можна умовно поділити на дві групи:

- локальний підхід;
- глобальний підхід.

Наближений локальний підхід переважно ґрунтується на використанні залежності динаміки збурень МГД величин від передісторії попередніх збурень (попередніх їх значень) та відповідного поточного стану середовища розповсюдження збурень. Наприклад, цей підхід активно використовується при розрахунках динаміки сонячного вітру, його дії на магнітосферу Землі та при прогнозуванні геомагнітних індексів (Dst, Kp, Ap індексів тощо) [21]. Це приводить до залежності МГД величин від власних попередніх значень та поточних значень параметрів провідного середовища, що дозволяє використовувати авторегресійні та нейромережеві моделі. Наприклад, активне використання авторегресійних моделей для прогнозування геомагнітних індексів почалося приблизно після 2000-го року у

зв'язку з накопиченням спостережуваної інформації про геомагнітні індекси та підвищеннем точності вимірювання параметрів сонячного вітру. До цього було запропоновано багато підходів до прогнозування динаміки МГД величин, що базувались на факторному аналізі та регресіях, напівемпіричних співвідношеннях (моделі Акасофу, WSA, Циганенко тощо), що використовували параметри середовища та вводили певні припущення щодо нього (наприклад, припущення щодо параметрів плазми в сонячному вітрі та стану Сонця чи сонячної корони). Локальні підходи дозволяють отримати лише відносно короткостроковий прогноз збурень МГД величин, оскільки при їх використанні неминуче з'являються неконтрольовані фактори, які в принципі не можуть бути враховані в моделях подібного класу. Наприклад, виникнення ударних хвиль при взаємодії ділянок плазми з різними швидкостями, магнітні через'єднання, можливі зміни параметрів плазми після проходження критичних точок, припущення одновимірностей моделей (через що, як правило, ігноруються зміни параметрів плазми в напрямі, поперечному до радіального напряму тощо). Іншою проблемою є суттєва нелінійність розглядуваних МГД процесів, внаслідок чого до цього часу достеменно невідома оптимальна структура (авто)регресійних моделей для прогнозування МГД величин, навіть у відносно простих й конкретних частинних випадках. Перевагою наближених "локальних" моделей, отриманих за допомогою цього підходу, є їх відносна простота у використанні та невибагливість до обчислювальних ресурсів.

Іншим підходом до моделювання динаміки плазми та МГД величин є так зване глобальне моделювання, при якому модель записується у вигляді системи рівнянь МГД (1.8)-(1.11), описаної раніше, що є нелінійною системою рівнянь в частинних похідних. Вказана модель являється глобальною моделлю розповсюдження збурень, що описує весь різновид плазмових явищ. Наприклад, при моделюванні динаміки сонячного вітру ця модель повністю й на всіх етапах описує динаміку плазми, починаючи від відриву плазмової течії від верхньої частини сонячної атмосфери, сонячної корони, і аж до взаємодії з магнітосферою Землі. Часто замість рівнянь МГД використовують дещо спрощені рівняння, наприклад, рівняння Бюргерса (1.26), які добре апроксимують форму ударних хвиль вихідної системи рівнянь МГД. Варто

відзначити, що кожне з рівнянь системи МГД має структуру, подібну до структури рівняння Бюргерса. При цьому, для опису конкретних фізичних ситуацій, крім рівнянь МГД інколи використовуються допоміжні рівняння та співвідношення. Наприклад, при моделюванні впливу сонячного вітру на магнітосферу Землі враховують специфічні рівняння для врахування динаміки кільцевих струмів іоносферного замикання та їхнього впливу на магнітосферну конвекцію [8, 20] — а саме, на внутрішній (ближчій до Землі) границі використовується (як правило двовимірна) модель для замикання струмів в іоносфері. Границя проходить на відстані $3\text{-}4 R_E$ від Землі (R_E — радіус Землі, приблизно дорівнює 6430 км), на ній розраховуються струми вздовж магнітного поля, які проектируються вздовж силових ліній вниз до іоносфери, і за їх допомогою розраховується електричний потенціал на поверхні сфери, який потім проектується назад до магнітосфери, визначаючи швидкість конвекції на внутрішній границі. Сонячний вітер налітає на магнітосферу Землі із гіперзвуковою швидкістю (200-1000 км/с), тому перед магнітосферою на відстані $15\text{-}20 R_E$ утворюється стояча ударна хвиля, на якій стрибкоподібно змінюються параметри сонячного вітру, а саме, потік гальмується до дозвукових швидкостей і турбулізується (разом із потоком турбулізується і магнітне поле). Так звана область магнітопаузи відокремлює область регулярного МПЗ від цієї турбулентної області (яку ще називають інколи магнітошаром). Саме положення магнітопаузи в просторі визначається балансом тисків потоку сонячного вітру та магнітного поля Землі. Теоретично глобальні моделі здатні описати ці ефекти, в тому числі турбулізацію плазми. На практиці виникнення подібної турбулентності призводить до значних обчислювальних труднощів, природа яких полягає в тому, що для адекватного опису потоку потрібно задаватись такої сіткою розмір якої буде співставним (чи бажано навіть меншим) із характерним розміром турбулізованих найменших підпотоків. При сильній турбулізації дані розміри стають надзвичайно малими, що призводить до практичної неможливості розрахунку точних потоків, тому в таких випадках зазвичай користуються усередненими спрощеними моделями та потоками.

На даний час найбільш відомими та досконалими системами "глобального" моделювання (тобто, комплексами комп'ютерних програм, які використовують описаний глобальний підхід) є [9]:

- 1) Dartmouth/NRL/Maryland LFM (США, ведучий автор J. Lyon);
- 2) GEDAS (Японія, провідний автор T. Ogino);
- 3) ISM (США, провідний автор G.L. Siscoe);
- 4) BATS-R-US (США, провідний автор T.I. Gombosi);
- 5) UCLA (США, провідний автор J. Raeder).

Всі перелічені системи розроблені у провідних наукових центрах, що займаються фізикою космосу та плазми. Мабуть, найбільш досконалою системою є система глобального моделювання BATS-R-US, розроблена в обчислювальному центрі Мічиганського університету в 2004 році, тому в даному пункті при характеристиці систем моделювання доцільно опиратися саме на неї.

Головною перевагою підходу глобального моделювання динаміки плазми та відповідних глобальних моделей є те, що вони єдині природнім математичним чином у вигляді систем рівнянь в частинних похідних дозволяють описати саму фізичну суть явища, причому поведінка отриманого розв'язку є узгодженою на всіх етапах еволюції збурень в системі.

Недоліками цього підходу є:

1) велика кількість сильно неоднорідних просторових та часових масштабів. Наприклад, існують струмові шари та області підвищених градієнтів на масштабах до декількох сотень кілометрів, а також області турбулізації та генерації ударних хвиль (наприклад, область перед магнітошаром). Внаслідок цього доводиться використовувати сильно неоднорідну сітку. Іншим виходом є використання різних моделей на різних областях, проте виникає проблема адекватного зв'язування відповідних граничних умов, що враховуючи, як правило, величезні розміри необхідної області моделювання, нелегко втілити (наприклад, в типовому випадку моделювання взаємодії плазмових процесів у системі "Сонце-Земля", область для

радіальної компоненти має протяжність в $250\text{-}300 R_E$, а для поперечних компонент – близько $100 R_E$);

2) невизначеність початкових та граничних умов. Для адекватного моделювання повної послідовності фізичних процесів у системі "Сонце-Земля" одна з граничних гіперповерхонь повинна безпосередньо співпадати чи перетинатись з умовою поверхнею сонячної корони, де відбувається викид речовини (наприклад, при корональному викиді маси). Зрозуміло, що в реальних умовах подібні дані можуть бути отримані лише опосередковано за допомогою космічних апаратів, що здійснюють спостереження за сонячною поверхнею та короною. Незалежно від кількості чи якості подібних апаратів отримані дані будуть дуже наближеними, оскільки вони принципово не здатні відобразити весь багатовид плазмових явищ на Сонці та в його недрах [9]. Способом отримання цілком адекватних граничних умов могло б бути незалежне моделювання процесів на поверхні та в недрах Сонця, проте дана задача є набагато складнішою за вихідну задачу. Таким чином, на даний час поки що немає надійних адекватних способів отримання краївих умов для реального моделювання всього ланцюга фізичних процесів в системі «Сонце-Земля», тому в даний час використання глобальних моделей зводиться до штучного задавання деякого збурення на одній із границь області та відслідковування змін в різних областях моделювання (в особливості, у магнітосфері). Вказаний підхід дозволяє перевіряти гіпотези про види та особливості поширення збурень. Саме таким чином працює згадана вище програма BATS-R-US.

3) велика математична складність глобального моделювання. Як вже було сказано (див. Вступ), система рівнянь МГД є нелінійною системою рівнянь в частинних похідних, що відноситься до класу сингулярних задач внаслідок переважаючого конвективного характеру розглядуваних процесів (так, наприклад, потоки сонячної плазми можуть рухатись з гіперзвуковою швидкістю до 1000 км/с включно при практично повністю відсутній дисипації енергії та розсіюванні) та виникнення ударних хвиль, що породжує нестійкості і непридатність до застосування переважної більшості класичних чисельних методів розв'язання рівнянь

математичної фізики (детально характер та причини виникаючих проблем описані далі). Стійкість багатьох методів можна забезпечити, пожертвувавши при цьому порядком їх точності. Тому чисельні методи останнім часом переживають стадію бурхливого розвитку, причому, відповідно до розвитку обчислювальної техніки, спостерігається тенденція до розгляду все більш складних та повних нелінійних моделей фізичних явищ. Внаслідок цього розробка стійких високоточних методів для чисельного розв'язання МГД рівнянь, що складають глобальні моделі, є надзвичайно актуальною і важливою проблемою;

4) велика обчислювальна складність глобального моделювання. Так, наприклад, вже згадувана програма глобального моделювання BATS-R-US [9] для розрахунку системи МГД рівнянь в реальних просторових масштабах використовує суперкомп'ютер Cray T3E-1200 з 1500 процесорів по 600 МГц кожний.

Внаслідок перелічених причин, на даний час, на думку автора (яка збігається з думкою багатьох провідних експертів у галузі математичного моделювання та фізики плазми [1-3]), головні зусилля слід направляти на розробку ефективних чисельних методів розв'язання систем рівнянь конвективно-дифузійного типу (і, в особливості, систем типу МГД).

1.3 Методи чисельного моделювання та їх аналіз

Існує багато методів чисельного розв'язання задач математичної фізики, які умовно можна розділити на сіткові, варіаційні та проекційні методи.

Сіткові і комбіновані методи [4, 22] історично є першими по їх застосуванню до різних завдань газової динаміки і магнітогідродинаміки, однак використання різницевих схем має свої особливості та проблеми при знаходженні розривних або недостатньо гладких рішень, які відповідають ударним хвильям. Існує теорема Лакса-Вендорфа, згідно якої тільки консервативні схеми (тобто ті схеми, які забезпечують виконання законів збереження на сітковому рівні) дозволяють отримати правильний опис подібних рішень, але побудова таких консервативних схем пов'язана з багатьма

труднощами. Схеми, що дозволяють ефективно вирішувати рівняння газової динаміки, і справляються навіть з сильними розривами потоків, фактично вперше були запропоновані Годуновим, зараз вони більш відомі під назвою схем скінченних об'ємів. Огляд методів, що ґрунтуються на основі модифікації схем Годунова, Лакса-Вендорфа, Лакса-Фрідріхса і Русанова, а також методи розщеплення розглядаються в [4, 22, 23]. Слід зауважити, що всі перераховані методи найбільш просто реалізуються на прямокутних сітках. На інших сітках і областях складної форми їх реалізація стикається з величими труднощами. Згадані схеми Лакса-Вендорфа та Лакса-Фрідріхса виявляють властивості нестійкості для процесів з нелінійною конвекцією, наприклад при використанні схеми Лакса-Вендорфа для рівняння Бюргерса в апроксимацію першої похідної входить похідна за потоком, що породжує нестійкість [15].

Існує велика група так званих безсіткових проекційних методів, в яких для виконання необхідних операцій інтерполяції та інтегрування не потрібно (в ідеальному випадку) будувати сітку. До цієї групи методів належить метод «хмарки точок», метод частин цілого, метод локальних інтегральних рівнянь, метод скінченних точок, безсітковий локальний метод Петрова-Гальоркіна, та інші. Проте майже всі вони неявно «в фоні» використовують сітку для інтегрування при побудові слабкої форми рівнянь. Лише останні два методи із перерахованих являються істинно безсітковими, проте їхнім дуже суттєвим недоліком являється велика чутливість до вибору точок колокації, що робить їх застосування проблематичним при розрахунку задач із сильними ударними хвилями.

Варіаційні методи зводять знаходження розв'язку вихідної задачі до задачі мінімізації деякого функціоналу в гільтбертовому просторі. Найбільш поширеними і відомими методами з даної групи є методи Рітца та Трефца [22, 24]. Недоліком даної групи методів є те, що вони висувають досить сильні вимоги до диференціального оператора задачі, а саме: оператор повинен бути самоспряженним і додатньо визначеним у відповідному гільтбертовому просторі. Це робить неможливою постановку і вирішення задач мінімізації для багатьох нестационарних краївих задач

(наприклад, для хвильового рівняння). Однак варіаційні методи дуже ефективні для стаціонарних еліптичних рівнянь, особливо для рівнянь Лапласа і Пуассона.

Проекційні методи (або методи зважених нев'язок). До методів даної групи можна віднести [16]:

- a) метод колокацій;
- b) метод найменших квадратів;
- c) метод Гальоркіна (Петрова-Гальоркіна);
- d) метод скінчених елементів;
- e) метод скінчених об'ємів.

Існує також велика група методів, які використовують перехід до лагранжевої системи координат (системи, що рухається разом з частинками об'єму речовини), наприклад методи комірок, частинок, розмитих частинок та інші їх різноманітні модифікації.

Ідея проекційних методів полягає у проектуванні точного розв'язку в гільбертовому просторі на деякий підпростір функцій і подальшої мінімізації нев'язки.

Слід зазначити, що практично кожен із згаданих вище проекційних методів (в особливості, метод скінчених елементів) включає такі допоміжні етапи, як: чисельне інтегрування, розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь або інтегральних рівнянь, розв'язання лінійних і нелінійних систем рівнянь. Ефективність виконання цих етапів суттєво впливає на точність отримуваного розв'язку та чисельну стійкість алгоритму. Нижче подається більш детальна інформація щодо методів виконання кожного з етапів.

- обчислення кратних інтегралів [24]:
 - a) використання функцій (поліномів), ортогональних на інтегровних областях (тобто фактично, узагальнення формул Гауса);
 - b) зведення кратного інтеграла до повторних та обчислення за методом Гауса;
 - c) квадратурні і неквадратурні формули;
 - d) використання спеціальних методів.

- чисельне інтегрування систем диференціальних рівнянь [25]:
 - a) класичні методи Рунге-Кутта та Кутта-Мерсона;
 - b) методи Адамса;
 - c) метод ламаних Ейлера;
 - d) метод Пікара;
 - e) методи Гіра, Розенброка і Радо для жорстких систем;
- методи апроксимації початкових умов:
 - a) використання лінійної сплайнових інтерполяції;
 - b) використання середньоквадратичного наближення.

Базовий метод. У даній праці в якості ідеології та базового методу розв'язання рівнянь в частинних похідних обраний метод (підхід) скінчених елементів. Це пов'язано з тим, що даний метод є наздивчайно універсальним та ефективним (в плані точності та стійкості отримуваних ним чисельних розв'язків), дозволяє проводити розрахунки на областях складної геометричної форми та враховувати відповідні граничні умови, дає гнучкі можливості для стабілізації чисельних розв'язків та забезпечення монотонності обчислювальних схем, дозволяє розраховувати навіть розривні (або недостатньо гладкі) узагальнені розв'язки МГД-рівнянь, що відповідають ударним хвильям, причому закони збереження при фронтах ударних хвиль виконуються автоматично. Останній факт є простим наслідком скінченно-елементного підходу, тоді як у разі різницевих схем перевірку і виконання даних умов необхідно забезпечувати окремо.

Іншою важливою перевагою МСЕ є те, що криволінійна область може бути апроксимована або навіть описана точно за допомогою криволінійних деформованих елементів, в той час, як різницеві методи не в змозі точно врахувати форму криволінійної області, і в таких випадках застосування різницевих методів стикається зі значними труднощами.

Головним недоліком МСЕ, хоч і не принциповим, є його висока складність та необхідність виконання великої кількості підготовчих операцій та проміжних етапів (дискретизація області, побудови елементів, базисних та вагових функцій, обчислення кратних інтегралів, розв'язання нелінійних СЗДР і алгебраїчних систем

рівнянь, сплайнова інтерполяція та інше). Нижче розглядають обчислювальні особливості даних етапів.

Обчислення кратних інтегралів. В процесі розв'язання задачі знадобиться обчислення кратних інтегралів від добутку базисних/вагових функцій та їх похідних. Для цього можна використовувати формули квадратур Гаусса, або приведений в [29] метод аналітичного обчислення подібних інтегралів.

Розв'язання СЗДР. Застосування скінченноелементної апроксимації дозволяє перейти від системи МГД-рівнянь до СЗДР, нелінійної в загальному випадку. Як правило, у системах рівнянь в частинних похідних з присутніми конвективними членами отримана СЗДР є жорсткою і звичайними методами сімейства методів Рунге-Кутти, Кутти-Мерсона чи Адамса її вирішити не вдається (оскільки доводиться брати настільки маленький крок інтеграції за часом, що час інтегрування системи стає просто «астрономічним», а збільшення кроку приводить до «розхитування» розв'язку – чисельної нестійкості). Тому для розв'язання СЗДР вибрані явні адаптивні методи, які добре себе зарекомендували на практиці. Необхідні відомості з теорії жорстких СЗДР викладені нижче.

Як вже було зазначено, із-за сингулярності систем рівнянь МГД, наявності конвективних членів та виникнення нелінійних ударних хвиль переважна більшість класичних методів (в тому числі МСЕ), що зазвичай використовуються для розв'язання рівнянь в частинних похідних, є нестійкими, і якщо й можна забезпечити їх стійкість якимось чином (наприклад, введенням штучної дисипації), то лише пожертвувавши при цьому порядком їх точності. Ефективних високоточних та дешевих в обчислювальному плані методів чисельного інтегрування МГД на даний час не існує, тому розробка методів, що задовольняють принаймні двом із перелічених якостей, є вкрай важливою. В даній роботі запропоновано декілька підходів, що дозволяють, принаймні, наблизитися до вказаної цілі та отримати стійкі та високоточні розв'язки (сингулярних) задач фізики плазми, в особливості задач моделювання коливань у циліндричних плазмових шнурах.

1.4 Висновки

У розділі розглянуто математичні моделі явища поширення коливань у середовищі з магнітним полем. Проаналізовано суть та специфіку явищ МГД, приведено вивід системи МГД-рівнянь. Також розглянуто декілька підходів до моделювання задач фізики плазми, виокремлено їх переваги та недоліки. Зрештою, було вирішено ґрунтуючися на відомих підходах до розв'язання систем рівнянь конвективно-дифузійного типу (адже описані фізичні процеси процеси належать до процесів типу КДР).

Також було проаналізовано найбільш поширені методи чисельного моделювання диференційних рівнянь.



2 ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СХЕМИ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЗБУРЕНЬ У ПЛАЗМІ

2.1 Поперечно-дрібномасштабні коливання в циліндричних плазмових шнурах

Розглянемо питання поширення збурень коливального характеру в циліндричних плазмових шнурах. Циліндричний плазмовий шнур круглого перерізу з гвинтовим магнітним полем є зручною плазмовою моделлю для експериментального і теоретичного дослідження різноманітних МГД збурень [14]. Така модель протягом тривалого часу слугує об'єктом досліджень у фізиці космічної та високотемпературної плазми. Наприклад, при вивчені корональних петель на Сонці після спалахів (рис. 2.1). Післяспалахові та спокійні (стационарні) корональні петлі мають відносно велику довжину (блізько 100-200 тисяч кілометрів, див. [7]), післяспалахові петлі, що лежать низько в короні, мають меншу довжину (блізько 30-70 тисяч кілометрів), проте поперечні перерізи усіх цих петель варіюються в границях декількох тисяч кілометрів, тобто, корональні магнітні трубки (петлі) є достатньо вузькими. Ця обставина дозволяє моделювати петлі циліндричними магнітними трубками (шнурами), нехтуючи їх кривизною [7]. Циліндрична геометрія також часто використовується при вивчені фундаментальних проблем фізики плазми, і в особливості, у дослідженнях коливань плазми навколо магнітних ліній Землі. Слід відмітити, що незважаючи на значну роботу по теоретичному дослідженю поведінки плазми в циліндричній геометрії, багато питань все ще залишаються незрозумілими і не до кінця вивченими. Частково це пов'язано з тією обставиною, що для вивчення коливань у зазначеній геометрії зазвичай використовується рівняння Хайна-Люста [26] або його модифікації, які є доволі складними, і розв'язання цих рівнянь наштовхується на істотні математичні труднощі. У роботі [14] отримано рівняння малих коливань, яке істотно простіше в порівнянні зі стандартним видом рівняння Хайна-Люста та продемонстровано, що отримане рівняння призводить до ряду відомих результатів (і також показано, що це рівняння може бути отримано з рівняння

Хайна-Люста після деяких нетривіальних математичних перетворень). Виведене в [14] рівняння дозволяє досліджувати поперечно-дрібномасштабні збурення плазми, які в ряді випадків призводять до нестійкості типу жолобкових і балонних мод (що грають важливу роль у фізиці плазми) та вивчати умови поширення і стійкості поперечно-дрібномасштабних збурень з безперервним спектром у неоднорідних плазмових шнурах. У даній роботі для моделювання коливань у циліндричних плазмових шнурах використовується, в тому числі, й згадане рівняння роботи [14]. При викладенні матеріалу даного підрозділу будемо слідувати працям [7, 14, 1-3, 26].

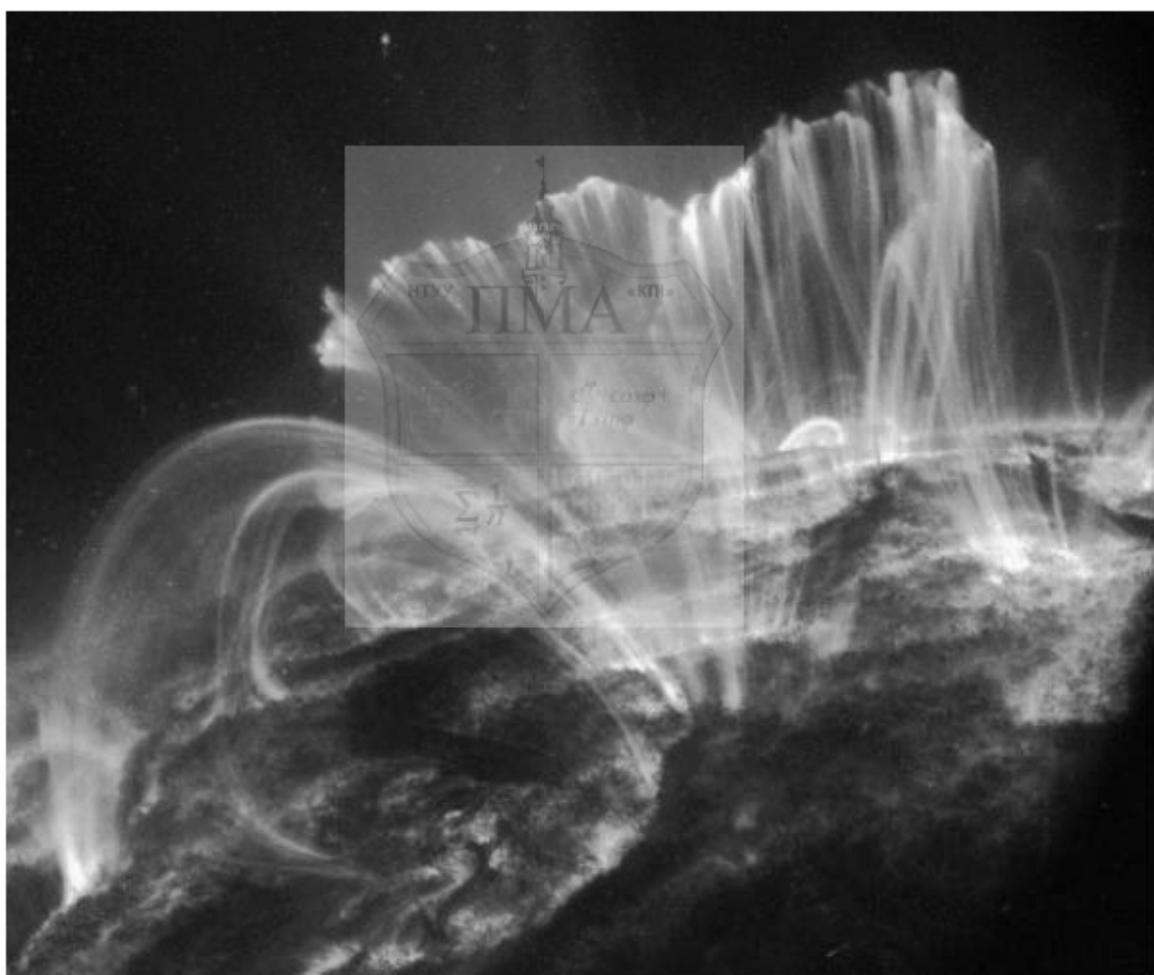


Рисунок 2.1 – Приклад корональних петель на Сонці після спалаху

На рис. 2.2 наведено схематичний приклад однорідного циліндричного плазмового (магнітного) шнура [7]. В так званій серцевині шнура (власне, і є сам шнур в широкому сенсі) магнітне поле й плазма є однорідними (індекси i), у зовнішньому

середовищі вони теж однорідні, але з іншими значеннями параметрів (індекси e). Параметри задовільняють певним умовам рівноваги, сенс яких в тому, що надлишковий тиск в серцевині повинен компенсуватись дією зовнішнього магнітного поля.

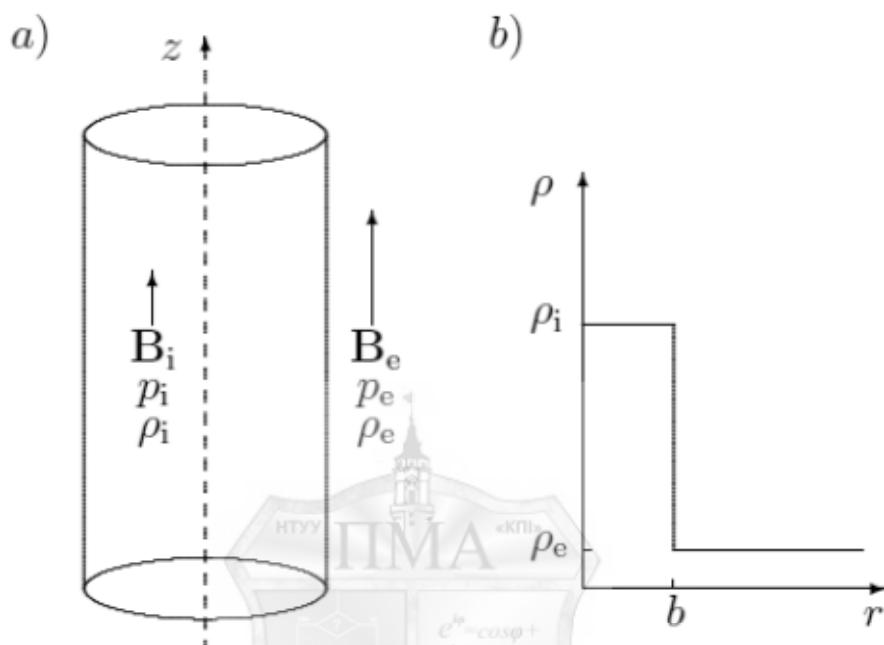


Рисунок 2.2 – а) Загальний вигляд однорідного плазмового шнура (магнітної трубки); б) радіальний розподіл щільності плазми

Складніший приклад "квазіоднорідного" складеного плазмового шнуря, запропонованого Б. Міхаляєвим [7] в 2005 році, подано на рис. 2.3. Цей плазмовий шнур має внутрішню однорідну частину радіуса b (серцевину) та навколошню кільцеву область радіуса a (оболонку), в якій магнітне поле є азимутальним і безструмовим (електричні струми зосереджені на границях «серцевина-оболонка» й «оболонка-зовнішнє середовище»).

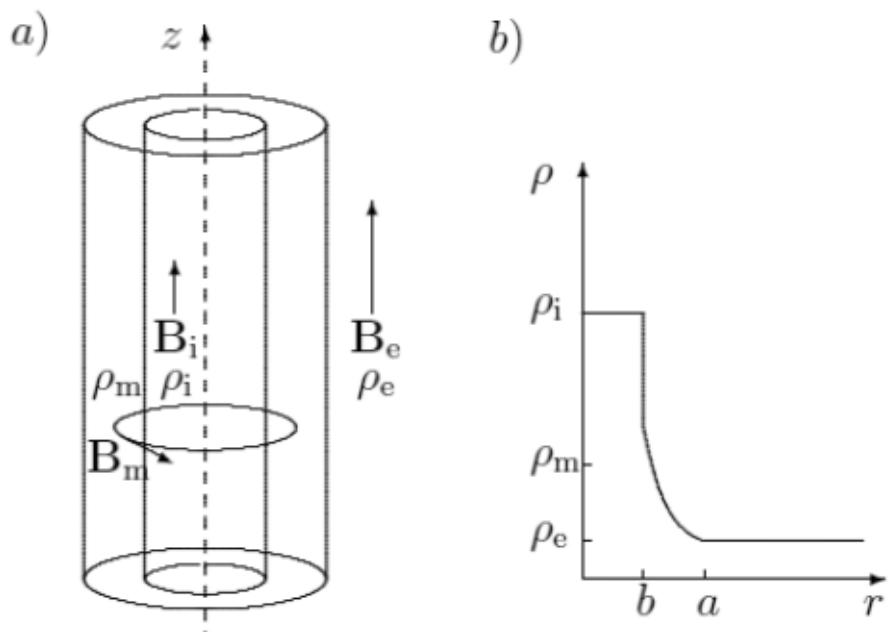


Рисунок 2.3 – а) Складений плазмовий шнур з азимутальним полем; б) радіальний розподіл щільності.

Представленний аналіз заснований на лінеаризованих МГД рівняннях малих коливань для ідеальної плазми, які напишемо, вважаючи залежність від часу $\exp(-i\omega t)$, в наступному вигляді:

$$\rho \omega^2 \vec{\xi} - \nabla \delta p_1 + (\vec{B} \cdot \nabla) \delta \vec{B} + (\delta \vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = 0, \quad (2.1)$$

де

$$\begin{aligned} \delta p_1 &= \delta p + \vec{B} \cdot \delta \vec{B} = -\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} - B^2 (\operatorname{div} \vec{\xi}_\perp + 2 \vec{\chi} \cdot \vec{\xi}_\perp), \\ \delta \rho &= -\operatorname{div}(\rho \vec{\xi}), \quad \delta p = -\vec{\xi} \cdot \nabla p - \gamma p \operatorname{div} \vec{\xi}, \\ \delta \vec{B} &= \operatorname{rot}[\vec{\xi} \times \vec{B}], \quad \delta \vec{j} = \operatorname{rot} \delta \vec{B}, \quad \operatorname{div} \delta \vec{B} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Символ δ використаний в (2.1)-(2.2) для позначення збурених величин. Тут введені наступні позначення: ρ – рівноважна щільність плазми, p – її тиск, γ – показник адіабати, $\vec{\xi}$ – вектор зміщення елементарного об’єму плазми, \vec{j} – щільність струму, \vec{B} – магнітне поле, $\vec{\chi}$ – вектор кривизни силових ліній магнітного поля. Для спрощення записів використаємо масштабування магнітного поля й щільності струму

$$\frac{\vec{B}}{\sqrt{4\pi}} \rightarrow \vec{B}, \quad \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \vec{j} \rightarrow \vec{j}.$$

Вважатимемо, що рівноважний стан плазми має симетрію циліндра круглого перерізу і що в циліндричній системі координат (r, φ, z) всі рівноважні параметри плазми й магнітного поля залежать тільки від радіальної координати, а магнітні поверхні являють собою вкладені циліндри радіусу r . Рівноважне магнітне поле в загальному випадку має вигляд

$$\vec{B} = B_\varphi(r) \vec{e}_\varphi + B_z(r) \vec{e}_z, \quad (2.3)$$

і задовольняють рівнянню магнітостатичної рівноваги

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{B_\varphi^2}{r} = 0. \quad (2.4)$$

Якщо в (2.1)-(2.2) вектор $\vec{\xi}$ записати як $\vec{\xi} = \xi_r \vec{e}_r + \xi_\varphi \vec{e}_\varphi + \xi_z \vec{e}_z$, то (r, φ, z) -

компоненти рівняння (2.1) з врахуванням рівності $\vec{\chi} = \left(\frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\vec{B}}{B} = -\frac{\vec{e}_r}{r} \left(\frac{B_\varphi}{B} \right)^2$ і

правил диференціювання ортів $\partial \vec{e}_r / \partial \varphi = \vec{e}_\varphi$, $\partial \vec{e}_\varphi / \partial \varphi = -\vec{e}_r$ приймуть вигляд

$$\rho \omega^2 \xi_r - \frac{d}{dr} \delta p_1 - \frac{2 B_\varphi \delta B_\varphi}{r} + i k_{\parallel} B \delta B_r = 0, \quad (2.5)$$

$$\rho \omega^2 \xi_\varphi - \frac{i m}{r} \delta p_1 + \frac{\delta B_r}{r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) + i k_{\parallel} B \delta B_\varphi = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho \omega^2 \xi_z - i k_z \delta p_1 + \delta B_r \frac{d}{dr} B_z + i k_{\parallel} B \delta B_z = 0. \quad (2.7)$$

При отриманні (2.5)-(2.7) було враховано, що коефіцієнти лінеаризованих МГД-рівнянь для круглого циліндра не залежать від координат Θ і Z . Тому, окремі фур'є-гармоніки в цих координатах незалежні і, відповідно, можна розглядати лише одну фур'є-гармоніку гвинтового збурення вигляду

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}(r) \exp[i(-\omega t + m\varphi + k_z z)],$$

де $k_z = -n/R$, m и n — цілі числа, відстань R визначає довжину L плазмового циліндра, $L = 2\pi R$. Оскільки амплітуда $\vec{\xi}(r)$ є функцією тільки радіуса, то задача

стає одновимірною. Фігуруюча в (2.5)-(2.7) повздовжня компонента хвильового вектору k_{\parallel} має вигляд

$$k_{\parallel} = \vec{k} \cdot \vec{e}_{\parallel} = \frac{m}{r} \frac{B_{\phi}}{B} + k_z \frac{B_z}{B},$$

а компоненти збуреного магнітного поля знаходяться з (2.2):

$$\begin{aligned}\delta B_r &= ik_{\parallel} B \xi_r, \\ \delta B_{\phi} &= ik_z (\xi_{\phi} B_z - \xi_z B_{\phi}) - \frac{\partial}{\partial r} (\xi_r B_{\phi}), \\ \delta B_z &= \frac{im}{r} (\xi_z B_{\phi} - \xi_{\phi} B_z) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r B_z).\end{aligned}\quad (2.8)$$

Збурений повний тиск δp_1 має вигляд

$$\delta p_1 = -(p + B^2) \operatorname{div} \vec{\xi} + ik_{\parallel} B^2 \xi_{\parallel} + 2B_{\phi}^2 \frac{\xi_r}{r}, \quad (2.9)$$

де

$$\operatorname{div} \vec{\xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{im}{r} \xi_{\phi} + ik_z \xi_z.$$

Для аналізу збурень зручно перейти в (2.5)-(2.7) від ϕ і z -компонент вектора зміщення $\vec{\xi}$ до компонент, направлених по бінормалі (ξ_b) і вздовж силових ліній магнітного поля (ξ_{\parallel})

$$\begin{aligned}\vec{\xi} &= \xi_r \vec{e}_r + \xi_b \vec{e}_b + \xi_{\parallel} \vec{e}_{\parallel}, \\ \xi_b &= \xi_{\phi} \frac{B_z}{B} - \xi_z \frac{B_{\phi}}{B}, \quad \vec{e}_b = \vec{e}_{\phi} \frac{B_z}{B} - \vec{e}_z \frac{B_{\phi}}{B}, \\ \xi_{\parallel} &= \xi_{\phi} \frac{B_{\phi}}{B} + \xi_z \frac{B_z}{B}, \quad \vec{e}_{\parallel} = \vec{e}_{\phi} \frac{B_{\phi}}{B} + \vec{e}_z \frac{B_z}{B}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Тоді рівняння (2.5)- (2.7) приймають вигляд

$$\begin{aligned}(\rho \omega^2 - k_{\parallel}^2 B^2) \xi_r - \frac{\partial}{\partial r} \delta p_1 - 2ik_{\parallel} \frac{B_{\phi} B_z}{r} \xi_b + 2ik_b \frac{B_{\phi}^2}{r} \xi_b + \\ + 2 \frac{B_{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\xi_r B_{\phi}) = 0,\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$(\rho \omega^2 - k_{\parallel}^2 B^2) \xi_b - ik_b \delta p_1 + 2ik_{\parallel} \frac{\xi_r}{r} B_{\phi} B_z = 0, \quad (2.12)$$

$$\left(\rho\omega^2 - k_{\parallel}^2 \frac{\gamma p}{1+\beta} \right) \xi_{\parallel} - ik_{\parallel} \frac{\beta}{1+\beta} \left[\delta p_1 - 2 \frac{B_{\phi}^2 \xi_r}{r} \right] = 0. \quad (2.13)$$

В (2.11)-(2.13) величини δp_1 , $\operatorname{div} \vec{\xi}$ й k_b виражені через амплітуди ξ_r , ξ_b , ξ_{\parallel} :

$$\begin{aligned} \delta p_1 &= -(\gamma p + B^2) \operatorname{div} \vec{\xi} + i B^2 k_{\parallel} \xi_{\parallel} + 2 B_{\phi}^2 \frac{\xi_r}{r}, \\ \operatorname{div} \vec{\xi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + i k_b \xi_b + i k_{\parallel} \xi_{\parallel}, \\ k_b &= \frac{m}{r} \frac{B_z}{B} - k_z \frac{B_{\phi}}{B}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Зведемо рівняння (2.11)-(2.13) до одного рівняння малих коливань для радіальної компоненти вектора зміщення ξ_r . Із (2.12)-(2.13) випливає

$$k_b \xi_b = \frac{i}{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)} \left[k_b^2 \delta p_1 - 2 k_{\parallel} k_b \frac{\xi_r}{r} B_{\phi} B_z \right], \quad (2.15)$$

$$k_{\parallel} \xi_{\parallel} = \frac{i k_{\parallel}^2}{\rho(\omega^2 - \omega_T^2)} \frac{c_T^2}{c_A^2} \left[\delta p_1 - \frac{2 B_{\phi}^2}{r} \xi_r \right]. \quad (2.16)$$

Тут використані наступні позначення

$$\omega_A^2 = k_{\parallel}^2 c_A^2, \quad \omega_s^2 = k_{\parallel}^2 c_s^2, \quad \omega_T^2 = k_{\parallel}^2 c_T^2, \quad c_A^2 = \frac{B^2}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{c_s^2}{1+\beta}, \quad \beta = \frac{c_s^2}{c_A^2}.$$

Підставляючи (2.15) і (2.16) в (2.14), отримаємо

$$\delta p_1 = \frac{1}{k_b^2 + \chi^2} \left[\rho(\omega^2 - \omega_A^2) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + 2 k_{\parallel} k_b \frac{\xi_r}{r} B_{\phi} B_z + \frac{2 B_{\phi}^2}{r} \xi_r \chi^2 \right], \quad (2.17)$$

$$\text{де } \chi^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega_s^2 - \omega^2)}{(c_s^2 + c_A^2)(\omega^2 - \omega_T^2)}.$$

Із (2.4), (2.11), (2.15) і (2.17) випливає наступне рівняння малих коливань:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} \left[\frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_b^2 + \chi^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] + 2r \xi_r \frac{d}{dr} \left[\frac{B_\phi^2}{r^2} \frac{\chi^2}{k_b^2 + \chi^2} + \frac{B_\phi B_z}{r^2} \frac{k_{\parallel} k_b}{k_b^2 + \chi^2} \right] = \\
& = \rho(\omega^2 - \omega_A^2) \xi_r + 2 \xi_r B_\phi \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi}{r} \right) - 4 \xi_r \frac{B_\phi^2}{r^2} \frac{(\chi^2)}{\rho k_b^2 + \chi^2} \frac{(k_{\parallel} B_z - k_b B_\phi)^2}{(\omega^2 - \omega_A^2)}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

В праці [14] показано, що рівняння (2.18) повністю еквівалентне відомому рівнянню Хайна-Люста. У випадку $B_\phi = 0, B_z \neq 0$ рівняння (2.18) співпадає з рівнянням малих коливань, виведеним в [27]. Якщо ж $B_\phi \neq 0, B_z = 0$, то (2.18) переходить в рівняння (19).

У випадку нестисливих збурень $(c_s \rightarrow \infty, \omega_T^2 \rightarrow \omega_A^2)$ з другого рівняння (2.14) й рівнянь (2.15), (2.16) і (2.17) отримується умова $\operatorname{div} \vec{\xi} = 0$, яка повинна виконуватись для таких збурень. Тоді (2.18) для нестисливих збурень зводиться до рівняння

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} \left[\frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_z^2 + m^2/r^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right] + 2r \xi_r \frac{d}{dr} \left[\frac{BB_\phi}{r^2} \frac{k_{\parallel}(m/r)}{k_z^2 + m^2/r^2} \right] - \\
& - \xi_r \left[\rho(\omega^2 - \omega_A^2) + 2B_\phi \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi}{r} \right) - \frac{4(B_\phi^2/r^2)}{k_z^2 + m^2/r^2} \frac{k_z^2 \omega_A^2}{(\omega^2 - \omega_A^2)} \right] = 0. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

В цьому рівняння повздовжня компонента хвильового вектора k_{\parallel} не може бути нульовою, оскільки при його отриманні вважалось $k_{\parallel} c_s \rightarrow \infty$.

2.2 Побудова обчислювальних схем

2.2.1 Скінченноелементні апроксимації

Як уже було відзначено раніше, МСЕ насправді, навіть не метод, а швидше ідеологія, що полягає в тому, щоб розбити досліджуваний об'єкт на окремі скінченні частини, і виконавши певні операції над цими частинами, повернутися до розгляду початкового цілісного об'єкту. У обчислювальній математиці під МСЕ зазвичай розуміють вибір апроксимуючих базисних функцій для методів Гальоркіна (та інших проекційних методів) у вигляді функцій зі скінченим носієм (тобто не рівних нулю на компактній множині). Тому має сенс спочатку ознайомитися з класичним методом Гальоркіна [16].

Метод Гальоркіна полягає в наступному. Нехай є задача $Au = f$, де A – оператор, що діє в деякому гільбертовому просторі. Зазвичай в якості простору розглядається L_2 або простори Соболєва. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(\vec{x}) \equiv \sum_{i=1}^n a_i N_i(\vec{x}), \quad (2.20)$$

де функції $\{N_i\}$ – повна лінійно незалежна система у відповідному гільбертовому просторі. Коефіцієнти $\{a_i\}$ визначаємо з умови ортогональності нев'язки $Au_n - f$ до базисних функцій N_i , тобто маємо систему рівнянь $(Au_n - f; N_i) = 0, i = 1..n$.

Отримуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $\{a_i\}$. У випадку

$$\text{нестаціонарних задач розв'язок шукаємо у вигляді } u_n(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) N_i(\vec{x})$$

(напівдискретна апроксимація Канторовича-Гальоркіна), і тоді для визначення коефіцієнтів отримуємо систему звичайних диференційних рівнянь. Викладений метод також відомий в математичній літературі під назвою методу Бубнова-Гальоркіна.

Можна визначати коефіцієнти $\{a_i\}$ з умови ортогональності нев'язки до іншого набору базисних функцій $\{W_i\}$, який не збігається з $\{N_i\}$. У цьому випадку виходить так званий узагальнений метод Гальоркіна (чи метод Петрова-Гальоркіна). Саме цей метод ми переважно і будемо використовувати у своїх обчисленнях.

Слід зауважити, що отриманий в результаті такої апроксимації розв'язок, який іноді називають слабким розв'язком задачі, при досить широких припущеннях буде сходитися до узагальненого розв'язку даної задачі при збільшенні кількості базисних функцій.

Нехай тепер набір базисних функцій $\{N_i\}$ має наступну властивість: кожна функція N_i із заданого набору відмінна від нуля тільки на обмеженій підмножині евклідового простору, або ж, як прийнято в говорити, функція N_i є фінітною із компактним носієм. Тоді описаний вище метод Гальоркіна з набором фінітних функцій будемо називати методом скінчених елементів.

Як уже було коротко відзначено раніше, вибір фінітних базисних функцій в якості базису простору пробних функцій має такі переваги:

1. При інтегруванні СЗДР, що виходить для визначення системи коефіцієнтів при базисних функціях, часто доводиться оперувати з матрицями, елементи яких є інтегралами від попарних добутків базисних функцій, тобто інтегралами виду $c_{ij} \equiv \int_S N_i N_j dS$ (де S – область, в якій розглядається задача). Тоді при використанні

фінітних базисних функцій зазначена матриця буде сильно розрідженою, і навіть може мати стрічкову структуру, що дозволяє економити пам'ять комп'ютера при зберіганні інформації та швидко виконувати операції при інтегруванні СЗДР.

2. Відносна простота врахування граничних умов, що лежать на криволінійних областях.

Побудова фінітних базисних функцій. Для побудови фінітних базисних функцій розглядувана область розбивається на так звані елементи, в якості яких зазвичай виступають прямокутники або трикутники. На рис. 2.4 показані деякі приклади скінчених елементів. Найчастіше використовуються трикутники. Тоді

розділіття області зводиться до відомої задачі тріангуляції області, для якої є розроблені алгоритми, наприклад, алгоритм тріангуляції Делоне [28]. Приклади тріангуляції круга та диска дані на рис. 2.5.

Однією з важливих переваг МСЕ є можливість згущення сітки елементів у "проблемних" областях, наприклад, в областях розривів. Точки зчленування елементів, а також крайні точки області, називаються вузлами. Тоді для кожного вузла i будується базисна функція N_i , що дорівнює одиниці в самому вузлі, та є кусково-поліноміальною на прилеглих до точки елементах. За межами вузла та прилеглих до нього елементів, базисна функція N_i тотожно дорівнює нулю.

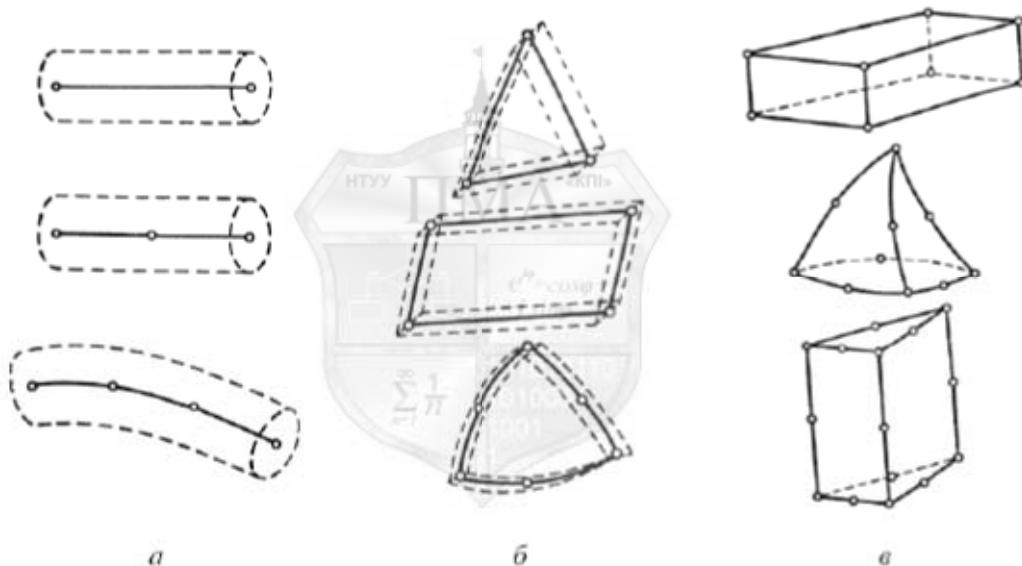


Рисунок 2.4 – Деякі види скінчених елементів:
а – одновимірні, б – двовимірні, в – тривимірні

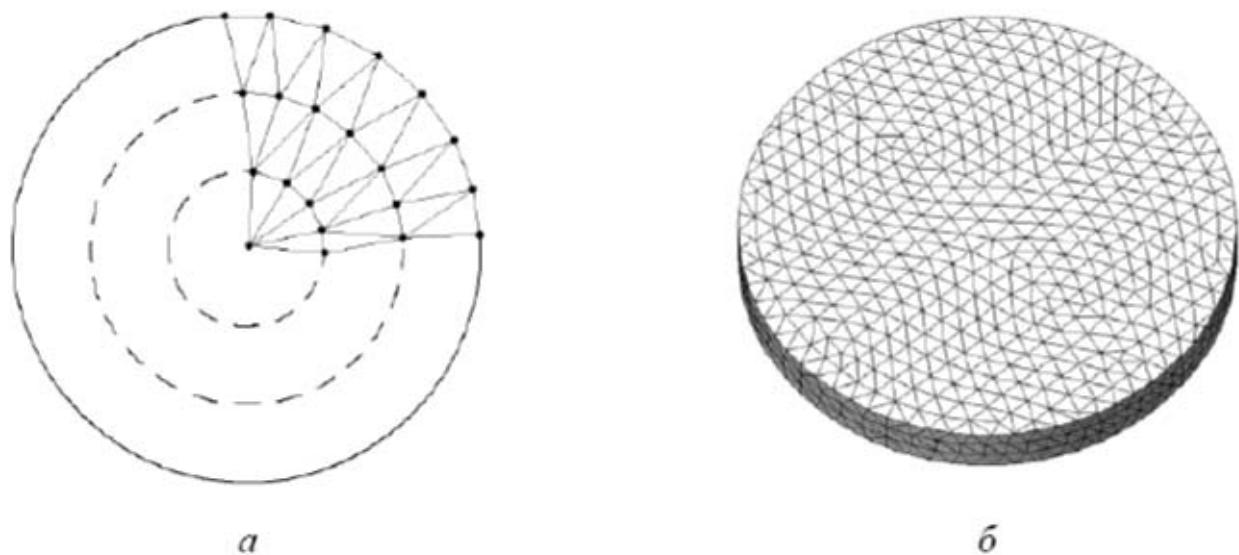


Рисунок 2.5 – Тріангуляція області: а – двовимірний круг, б – тривимірний диск

Звуження базисної функції на елемент називається функцією форми. Функції форми як правило, є поліноміальними функціями, що дорівнюють одиниці на одній вершині елемента, та є рівними нулю на стороні, протилежній даній вершині. Видно, що на одному двовимірному трикутному елементі можна побудувати максимум три функції форми.

Дуже часто використовуються лінійні функції форми, так як їх легко будувати і з ними досить легко оперувати. На рис. 2.6 показані приклади функції форми.

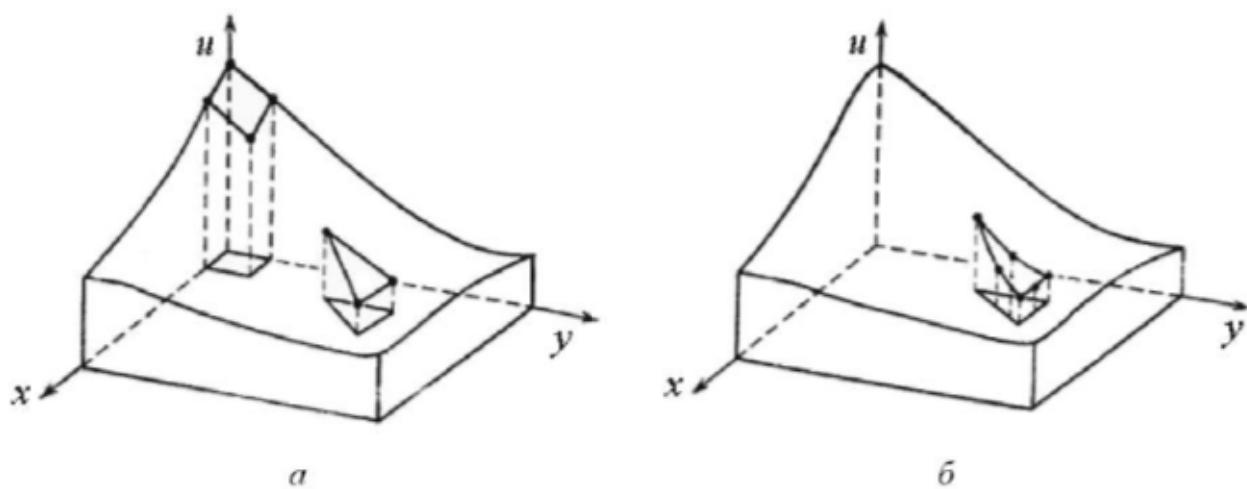


Рисунок 2.6 – Функції форми: а – лінійні, б – нелінійні [29]

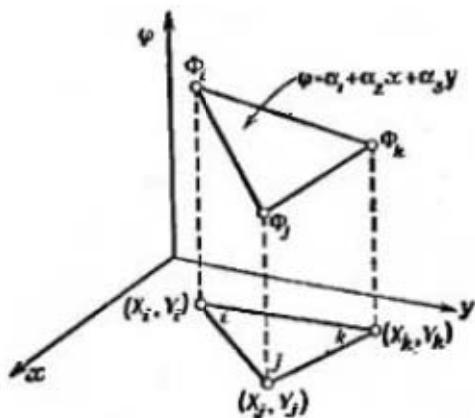


Рисунок 2.7 – Зміщена лінійна функція форми φ [29]

В двовимірному випадку при використанні лінійних функцій форми (рис. 2.7) базисні функції N_i будуть мати вигляд піраміди одиничної висоти (рис. 2.8 та 2.9), що "зшита" з окремих функцій форми на елементах, сусідніх до вузла. Одна цілісна базисна функція N_i , що дорівнює одиниці у вузловій точці i та спадаюче лінійно на прилеглих до точки i елементах, може бути побудована, як лінійний двовимірний сплайн, "зшитий" з окремих функцій форми. Нехай даний трикутний елемент з вершинами $(X_i; Y_i)$, $(X_j; Y_j)$, $(X_k; Y_k)$. Тоді для цього елементу можна побудувати три функції форми $\varphi_i(x, y)$, $\varphi_j(x, y)$, $\varphi_k(x, y)$, що приймають значення одиниці у вузлах $(X_i; Y_i)$, $(X_j; Y_j)$, $(X_k; Y_k)$ відповідно, і рівні нулю в усіх інших вузлах. Можна показати, що [29]:

$$\varphi_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \text{ де } \begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases},$$

$$\varphi_j(x, y) = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y), \text{ де } \begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k \\ b_j = Y_k - Y_i \\ c_j = X_i - X_k \end{cases},$$

$$\varphi_k(x, y) = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y), \text{ де } \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k = Y_i - Y_j \\ c_k = X_j - X_i \end{cases}.$$

Тут введена величина плоші елемента:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{array} \right| = 2A.$$

Користь від введення цієї величини полягає в тому, що введені нижче величини D_{ij} , D_{ij}^x , D_{ij}^y , T_{ijk} , T_{ijk}^x , T_{ijk}^y , Q_{iljk}^x , Q_{iljk}^y (інтеграли від попарних добутків базисних функцій та їх похідних) у випадку використання співпадаючих наборів базисних та вагових функцій (тобто, використання класичного методу Гальоркіна) виражаються через величину $2A$. Дійсно, справедлива наступна формула для інтеграла від функцій форми на окремому елементі E (мається на увазі, що функції форми побудовані для цього ж елементу):

$$\iint_E \varphi_i^a \cdot \varphi_j^b \cdot \varphi_k^c dx dy = \frac{e^{i\theta} \cos \varphi + i \sin \varphi}{(a+b+c+2)!} \frac{a!b!c!}{2A}.$$

Тепер для того, щоб знайти інтеграл від добутку базисних функцій, треба знайти спільні елементи для всіх функцій в їх областях визначення, а потім на кожному знайденому спільному елементі скористатися наведеною формулою.

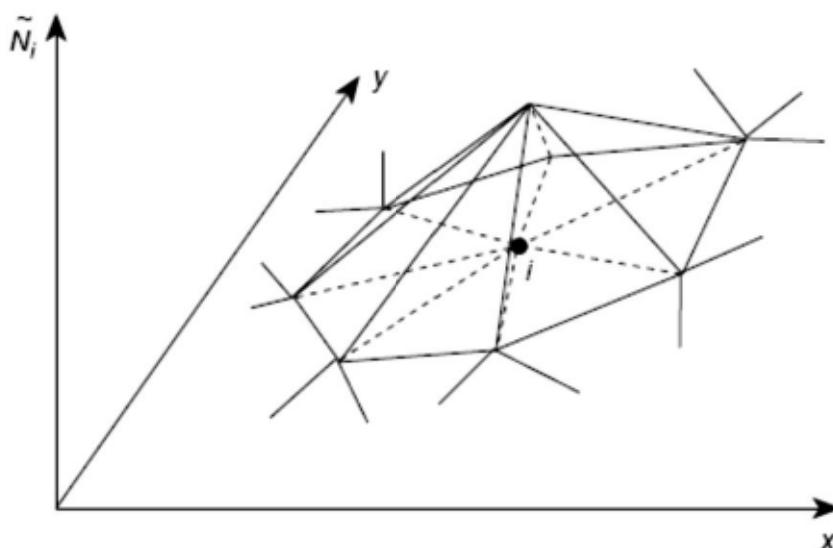


Рисунок 2.8 – Базисна функція в двовимірному випадку

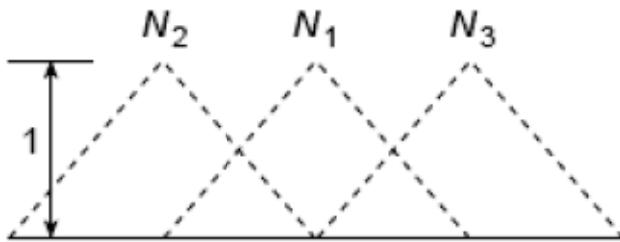


Рисунок 2.9 – Базисна функція в одновимірному випадку

Скінченноелементні апроксимації рівнянь МГД. Побудуємо тепер скінченноелементні апроксимації для двовимірної системи МГД (1.12)-(1.17), слідуючи методиці, викладеній в [17]. Нехай в області введена тріангуляція та побудована сітка. Кожному вузлу j , $j=1..n$ відповідає базисна функція $N_j(x, y)$ та вагова функція $W_j(x, y)$. Чисельний розв'язок системи будемо шукати у вигляді (2.20):

$$\rho(t, x, y) = \sum_{j=1}^n R_j(t) N_j(x, y) \quad (2.21)$$

$$p(t, x, y) = \sum_{j=1}^n P_j(t) N_j(x, y) \quad (2.22)$$

$$u_x(t, x, y) = \sum_{j=1}^n U_{xj}(t) N_j(x, y) \quad (2.23)$$

$$u_y(t, x, y) = \sum_{j=1}^n U_{yj}(t) N_j(x, y) \quad (2.24)$$

$$B_x(t, x, y) = \sum_{j=1}^n B_{xj}(t) N_j(x, y) \quad (2.25)$$

$$B_y(t, x, y) = \sum_{j=1}^n B_{yj}(t) N_j(x, y) \quad (2.26)$$

Помножимо тепер кожне з рівнянь (1.12)-(1.17) на вагову функцію $W_i(x, y)$, що відповідає вузлу i та проінтегруємо по просторовій області S визначення задачі. Отримаємо слабку форму рівнянь. Тепер, підставляючи в слабку форму вирази (2.21)-(2.26), отримаємо систему ЗДР. Наприклад, підставляючи (2.21)-(2.26) в слабку форму рівняння (1.12), маємо:

$$\int_S \sum_j \dot{R}_j N_j W_i dS + \int_S \left(\sum_k U_{xk} N_k \right) \left(\sum_j R_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) W_i dS + \int_S \left(\sum_k U_{yk} N_k \right) \left(\sum_j R_j \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) W_i dS + \\ + \int_S \left(\sum_j R_j N_j \right) \left(\sum_k U_{xk} \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) W_i dS + \int_S \left(\sum_j R_j N_j \right) \left(\sum_k U_{yk} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) W_i dS = 0.$$

Виносячи за знак інтеграла функції, що залежать від часу та групуючи суми, отримаємо наступний вираз:

$$\sum_j \left(\int_S N_j W_i dS \right) \dot{R}_j + \sum_k \sum_j \left(\int_S N_k W_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dS \right) R_j U_{kx} + \sum_k \sum_j \left(\int_S N_k W_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dS \right) R_j U_{ky} + \\ + \sum_k \sum_j \left(\int_S N_j W_i \frac{\partial N_k}{\partial x} dS \right) R_j U_{kx} + \sum_k \sum_j \left(\int_S N_j W_i \frac{\partial N_k}{\partial y} dS \right) R_j U_{ky} = 0.$$

Останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$\sum_j \left(\int_S N_j N_i dS \right) \dot{R}_j + \sum_k \sum_j \left(\int_S N_i \frac{\partial (N_j N_k)}{\partial x} dS \right) R_j U_{kx} + \\ + \sum_k \sum_j \left(\int_S N_i \frac{\partial (N_j N_k)}{\partial y} dS \right) R_j U_{ky} = 0$$

або

$$\sum_j D_{ij} \dot{R}_j + \sum_k \sum_j (T_{ijk}^x + T_{ikj}^x) R_j U_{kx} + \sum_k \sum_j (T_{ikj}^y + T_{ijk}^y) R_j U_{ky} = 0, \quad (2.27)$$

де позначено

$$D_{ij} = \int_S W_i N_j dS, \quad T_{ijk}^x = \int_S W_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial x} dS, \quad T_{ijk}^y = \int_S W_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial y} dS.$$

Виконавши такі операції з усіма рівняннями (1.12)-(1.17), отримаємо наступну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_j D_{ij} \frac{dR_j}{dt} + \sum_k \sum_j (T_{ijk}^x + T_{ikj}^x) R_j U_{kx} + \sum_k \sum_j (T_{ikj}^y + T_{ijk}^y) R_j U_{ky} = 0, \quad (2.28)$$

$$\sum_j D_{ij} \frac{dP_j}{dt} + \sum_k \sum_j (T_{ikj}^x + \gamma T_{ijk}^x) P_j U_{kx} + \sum_k \sum_j (T_{ijk}^y + \gamma T_{ikj}^y) P_j U_{ky} = 0, \quad (2.29)$$

$$\sum_j D_{ij} \frac{dB_{xj}}{dt} = \sum_k \sum_j (T_{ijk}^y B_{yj} U_{xk} - T_{ijk}^y B_{xj} U_{yk} - T_{ikj}^x B_{xj} U_{xk} - T_{ikj}^y B_{xj} U_{yk}), \quad (2.30)$$

$$\sum_j D_{ij} \frac{dB_{yj}}{dt} = \sum_k \sum_j (T_{ijk}^x B_{xj} U_{yk} - T_{ikj}^x B_{yj} U_{xk} - T_{ikj}^y B_{yj} U_{yk} - T_{ijk}^x B_{yj} U_{xk}), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \sum_l \sum_j R_l T_{ijl} \frac{dU_{xj}}{dt} + \sum_j \sum_k \sum_l (R_l U_{xj} U_{xk} Q_{ijkl}^x + R_l U_{yj} U_{xk} Q_{ijkl}^y) &= - \sum_l P_l D_{il}^x - \\ - \frac{1}{\mu_0} \sum_k \sum_j (B_{yk} B_{yj} T_{ikj}^x - B_{yk} B_{xj} T_{ikj}^y) - v \sum_l U_{xl} (D_{il}^{xx} + D_{il}^{yy}) + g_{u_x} + \iint_S F_x W_i dS, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \sum_l \sum_j R_l T_{ijl} \frac{dU_{yj}}{dt} + \sum_j \sum_k \sum_l (R_l U_{xj} U_{yk} Q_{iljk}^x + R_l U_{yj} U_{yk} Q_{iljk}^y) &= - \sum_l P_l D_{il}^y + \\ + \frac{1}{\mu_0} \sum_k \sum_j (B_{xk} B_{yj} T_{ikj}^x - B_{xk} B_{xj} T_{ikj}^y) - v \sum_l U_{yl} (D_{il}^{xx} + D_{il}^{yy}) + g_{u_y} + \iint_S F_y W_i dS, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де $D_{ij} \equiv \iint_S W_i N_j d\Omega$, $D_{ij}^x \equiv \iint_S W_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega$, $D_{ij}^y \equiv \iint_S W_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega$, $D_{ij}^{xx} \equiv \iint_S \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega$,

$$D_{ij}^{yy} \equiv \iint_S \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega, \quad T_{ijk} \equiv \iint_S W_i N_j N_k d\Omega, \quad T_{ijk}^x \equiv \iint_S W_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial x} d\Omega,$$

$$T_{ijk}^y \equiv \iint_S W_i N_j \frac{\partial N_k}{\partial y} d\Omega, \quad Q_{ijkl}^x \equiv \iint_S W_i N_j N_l \frac{\partial N_k}{\partial x} d\Omega, \quad Q_{ijkl}^y \equiv \iint_S W_i N_j N_l \frac{\partial N_k}{\partial y} d\Omega, \quad \text{а}$$

величини g_{u_x} , g_{u_y} є доданками, що утворюються після застосування багатовимірних формул інтегрування частинами до дифузійних членів.

При $W_i = N_i$ (класичний метод Гальоркіна) видно, що величина D_{ij} симетрична по своїм індексам, тобто $D_{ji} = D_{ij}$. Теж саме можна сказати і про величину T_{ijk} , яка симетрична по всіх трьом індексам. Величини T_{ijk}^x , T_{ijk}^y симетричні по першим двом індексам, а величини Q_{ijkl}^x , Q_{ijkl}^y симетричні по першим трьом індексам. Крім того, матриця $\{D_{ij}\}$ є розрідженою внаслідок того, що базисні та вагові функції фінітні, тобто відмінні від нуля тільки на обмеженій множині області S . Можна заздалегідь

оцінити ширину смуги матриці $\{D_{ij}\}$: необхідно для кожного елементу області знайти модуль максимальної різниці між вузлами цього елементу, а потім з отриманих величин узяти максимальну. З цього правила видно, що ширина смуги матриці $\{D_{ij}\}$ залежить від способу нумерації вузлів, тому треба прагнути провести нумерацію вузлів так, щоб мінімізувати ширину смуги У разі прямокутної області для мінімізації ширини смуги слід виконувати нумерацію вузлів, рухаючись паралельно стороні, в якій задане користувачем число вузлових точок менше (порівняно з іншою стороною, її перпендикулярно). Якщо говорити про окремий елемент, то бажано виконувати нумерацію його вузлів за зростанням проти годинникової стрілки. Вказані властивості розрідженості і симетрії матриць $D_{ij}, T_{ijk}, T_{ijk}^x, T_{ijk}^y, Q_{iljk}^x, Q_{iljk}^y$ (останні слід розглядати, як багатовимірні таблиці) при розрахунках дозволяють істотно економити пам'ять комп'ютера.

Аналогічним чином апроксимуємо систему (1.18)-(1.25). Вважаємо силу тяжіння \vec{g} постійною. Введемо сітку $z_i, i = 1..n$ на відрізку $z \in S = [L_1; L_2]$, $z_1 = L_1$, $z_n = L_2$. Нехай

$$\rho(t, z) = \sum_j R_j(t) N_j(z), \quad p(t, z) = \sum_j P_j(t) N_j(z),$$

$$B_x(t, z) = \sum_j B_{xj}(t) N_j(z), \quad B_y(t, z) = \sum_j B_{yj}(t) N_j(z), \quad B_z(t, z) = \sum_j B_{zj}(t) N_j(z),$$

$$u_x(t, z) = \sum_j U_{xj}(t) N_j(z), \quad u_y(t, z) = \sum_j U_{yj}(t) N_j(z), \quad u_z(t, z) = \sum_j U_{zj}(t) N_j(z). \quad \text{Тоді}$$

виконуючи операції, цілком аналогічні попередньому системі в попередньому випадку, отримуємо наступну систему:

$$\sum_j D_{ij} \dot{R}_j = - \sum_j \sum_k (T_{ijk}^z + T_{ikj}^z) R_j U_{zk}, \quad (2.34)$$

$$\sum_j D_{ij} \dot{P}_j = - \sum_j \sum_k (\gamma T_{ijk}^z + T_{ikj}^z) P_j U_{zk}, \quad (2.35)$$

$$\sum_j D_{ij} \dot{B}_{xj} = - \sum_j \sum_k (T_{ijk}^z + T_{ikj}^z) B_{xj} U_{zk} + \sum_j \sum_k T_{ijk}^z B_{xj} U_{zk}, \quad (2.36)$$

$$\sum_j D_{ij} \dot{B}_{yj} = - \sum_j \sum_k \left(T_{ijk}^z + T_{ikj}^z \right) B_{yj} U_{zk} + \sum_j \sum_k T_{ijk}^z B_{yz} U_{yk}, \quad (2.37)$$

$$\sum_j D_{ij} \dot{B}_{zj} = 0, \quad (2.38)$$

$$\sum_j \sum_l T_{ijl} R_l \dot{U}_{xj} = - \sum_j \sum_k \sum_l Q_{ijkl}^z R_l U_{zj} U_{xk} + \frac{1}{\mu_0} \sum_j \sum_k T_{ijk}^z B_{yz} B_{xk} - \nu \sum_j D_{ij}^{zz} U_{xj} + g_{xi}, \quad (2.39)$$

$$\sum_j \sum_l T_{ijl} R_l \dot{U}_{yj} = - \sum_j \sum_k \sum_l Q_{ijkl}^z R_l U_{zj} U_{yk} + \frac{1}{\mu_0} \sum_j \sum_k T_{ijk}^z B_{yz} B_{yk} - \nu \sum_j D_{ij}^{zz} U_{yj} + g_{yi}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_l T_{ijl} R_l \dot{U}_{zj} = & - \sum_j \sum_k \sum_l Q_{ijkl}^z R_l U_{zj} U_{zk} - \sum_j D_{ij}^z P_j - g \sum_j D_{ij} R_j - \\ & - \frac{1}{\mu_0} \sum_j \sum_k T_{ijk}^z (B_{xj} B_{xk} + B_{yj} B_{yk}) - \nu \sum_j D_{ij}^{zz} U_{zj} + g_{zi}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Тут використовувалися наступні позначення:

$$\begin{aligned} D_{ij} &\equiv \int_S W_i N_j dz, \quad D_{ij}^z \equiv \int_S W_i \frac{dN_j}{dz} dz, \quad D_{ij}^{zz} \equiv \int_S \frac{dW_i}{dz} \frac{dN_j}{dz} dz, \\ T_{ijk} &\equiv \int_S W_i N_j N_k dz, \quad T_{ijk}^z \equiv \int_S W_i N_j \frac{dN_k}{dz} dz, \quad Q_{ijkl}^z = \int_S W_i N_j N_l \frac{dN_k}{dz} dz. \end{aligned}$$

При отриманні співвідношень (2.34)-(2.41) для рівнянь руху (1.23)-(1.25) використовувалось інтегрування по частинам, щоб позбутися других похідних $\partial^2 u / \partial z^2$ при апроксимації дифузійного доданку. Тому доданок $g_i = (g_{xi}, g_{yi}, g_{zi})$ визначається наступним чином:

$$g_i = g_i(t) = \left(\nu W_i(z) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right) \Big|_{z=L_2} - \left(\nu W_i(z) \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right) \Big|_{z=L_1} \quad (2.42)$$

Оскільки вагова функція $W_i(z)$ є фінітною з носієм $[z_{i-1}; z_{i+1}]$, то $W_i(z=L_2) = \delta_n^i$, $W_i(z=L_1) = \delta_1^i$, де δ_j^i – символ Кронекера. Видно, що $g_i = 0$ при $i = 1$ чи $i = n$.

Розглянемо тепер важливе питання врахування граничних умов для рівнянь МГД (1.18)-(1.25). Нехай, наприклад, в точці $z=z_n=L_2$ визначено умову третього роду $\left(\alpha \cdot u + \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z=L_2} = f(t)$, α та β – деякі коефіцієнти, $\beta \neq 0$. Тоді виражаємо

похідну $\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=L_2} = \frac{1}{\beta} (f(t) - \alpha \cdot u(L_2, t))$ та підставляємо її в (2.42). Границя умова

другого роду (при $\alpha = 0$) є частковим випадком розглянутого. У випадку, коли задана гранична умова першого роду, тобто $u(L_2, t) = f(t)$, то коефіцієнт $a_n(t)$ в розвиненні по базисним функціям стає відомим, оскільки $a_n(t) = f(t)$, і тому не входить до системи ЗДР (2.34)-(2.41) в якості невідомої змінної, а n -те рівняння для величини u викидається з системи.

Подібним чином проводиться врахування граничних умов для задач більшої за одиницю просторової розмірності, а саме, інтеграл від добутку вагової функції та лапласіана невідомої величини можна виразити через суму інтеграла від добутку перших похідних вагової/невідомої функцій та криволінійного інтеграла від добутку вагової та перших похідних невідомої функції (аналог формули Гріна):

$$g_i = \oint_{\partial S} (\vec{n} \cdot \nabla u) W_i d\Gamma,$$

і потім в цю формулу (подібно до описаного вище одновимірного випадку) підставляється гранична умова (2-го чи 3-го роду). Для умов першого роду значення розв'язку у відповідних вузлах відоме.

Скінченноелементні апроксимації рівнянь коливань плазми у плазмових шнурах. Розглянемо побудову скінченноелементних апроксимацій рівнянь (2.18) і (2.19). Вважатимемо, що вузли x_i ($0 \leq i \leq M + 1$) на області $0 \leq r \leq r_0$ розподілені рівномірно з кроком h , $x_0 = 0$, $x_{M+1} = r_0$. Згідно описаної вище процедури методу Петрова-Гальоркіна (узагальненого методу Гальоркіна), помножимо рівняння (2.18) на вагову функцію $W_i(r)$ (тут $1 \leq i \leq M$) та проінтегруємо по області $0 \leq r \leq r_0$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
& \int_0^{r_0} \left(\frac{d}{dr} \left[\frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_b^2 + \chi^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) \right] + 2r\xi_r \frac{d}{dr} \left[\frac{B_\phi^2}{r^2} \frac{\chi^2}{k_b^2 + \chi^2} + \frac{B_\phi B_z}{r^2} \frac{k_{||} k_b}{k_b^2 + \chi^2} \right] \right) W_i(r) dr = \\
& = \int_0^{r_0} \left(\rho(\omega^2 - \omega_A^2) \xi_r + 2\xi_r B_\phi \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi}{r} \right) - 4\xi_r \frac{B_\phi^2}{r^2 \rho} \frac{\chi^2}{k_b^2 + \chi^2} \frac{(k_{||} B_z - k_b B_\phi)^2}{(\omega^2 - \omega_A^2)} \right) W_i(r) dr,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Дифузійний член звідси можна перетворити наступним чином (враховуємо, що вагові функції, на які множиться нев'язка, приймають нульові значення):

$$\int_0^{r_0} \left(\frac{d}{dr} \left[\frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_b^2 + \chi^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) \right] \right) W_i(r) dr = - \int_0^{r_0} \left[\frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_b^2 + \chi^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) \right] \frac{dW_i(r)}{dr} dr.$$

У випадку, коли граничні умови не є умовами першого роду, за рахунок перетворення даного дифузійного члена відбувається врахування цих граничних умов згідно методиці, детально описаній вище. Підставляючи тепер в (2.43) замість ξ_r

наближений розв'язок $\tilde{\xi}_r = \sum_{j=0}^{M+1} a_j N_j(r)$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $\{a_j\}$. Зробимо це поетапно. Спочатку перетворимо дифузійний член:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{r_0} \left[\frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_b^2 + \chi^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) \right] \frac{dW_i(r)}{dr} dr = - \int_0^{r_0} \left[\frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_b^2 + \chi^2} \frac{1}{r} (\xi_r + r\xi'_r) \right] \frac{dW_i(r)}{dr} dr, \text{ звідки} \\
& - \int_0^{r_0} \left[\frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{r(k_b^2 + \chi^2)} \left(\sum_{j=0}^{M+1} a_j N_j(r) + r \sum_{j=0}^{M+1} a_j \frac{dN_j(r)}{dr} \right) \right] \frac{dW_i(r)}{dr} dr = \\
& = - \sum_{j=0}^{M+1} \left(\int_0^{r_0} \frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{r(k_b^2 + \chi^2)} \frac{dW_i(r)}{dr} \left(N_j(r) + r \frac{dN_j(r)}{dr} \right) dr \right) a_j.
\end{aligned}$$

Аналогічно перетворюються й інші члени в (2.43). В результаті отримаємо:

$$\sum_{j=0}^{M+1} \left\{ \int_0^{r_0} \left[2r \frac{d}{dr} \left[\frac{B_\phi^2}{r^2} \frac{\chi^2}{k_b^2 + \chi^2} + \frac{B_\phi B_z}{r^2} \frac{k_\parallel k_b}{k_b^2 + \chi^2} \right] \right] W_i(r) N_j(r) dr - \right. \\ \left. - \int_0^{r_0} \left[\rho \left(\omega^2 - \omega_A^2 \right) + 2B_\phi \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi}{r} \right) - 4 \frac{B_\phi^2}{r^2} \frac{(\chi^2)}{k_b^2 + \chi^2} \frac{(k_\parallel B_z - k_b B_\phi)^2}{(\omega^2 - \omega_A^2)} \right] W_i(r) N_j(r) dr - \right. \\ \left. - \int_0^{r_0} \frac{\rho (\omega^2 - \omega_A^2)}{r(k_b^2 + \chi^2)} \left(N_j(r) + r \frac{dN_j(r)}{dr} \right) \frac{dW_i(r)}{dr} dr \right\} a_j = 0. \quad (2.44)$$

Оскільки a_0 й a_{M+1} виражуються з граничних умов, коли ці умови є умовами першого роду, то в системі (2.44) складові суми з цими членами переносяться вправо; в результаті отримаємо систему відносно невідомих $\{a_j\}_{j=1}^M$.

Обчислювальні схеми для рівняння (2.19) будується цілком аналогічно, як це щойно було зроблено для (2.18):

$$\sum_{j=0}^{M+1} \left\{ \int_0^{r_0} \left[2r \frac{d}{dr} \left[\frac{BB_\phi}{r^2} \frac{k_\parallel (m/r)}{k_z^2 + m^2/r^2} \right] \right] W_i(r) N_j(r) dr - \right. \\ \left. - \int_0^{r_0} \left[\rho \left(\omega^2 - \omega_A^2 \right) + 2B_\phi \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi}{r} \right) - \frac{4(B_\phi^2/r^2)}{k_z^2 + m^2/r^2} \frac{k_z^2 \omega_A^2}{(\omega^2 - \omega_A^2)} \right] W_i(r) N_j(r) dr - \right. \\ \left. - \int_0^{r_0} \frac{\rho (\omega^2 - \omega_A^2)}{k_z^2 + m^2/r^2} \frac{1}{r} \left(N_j(r) + r \frac{dN_j(r)}{dr} \right) \frac{dW_i(r)}{dr} dr \right\} a_j = 0. \quad (2.45)$$

Розглянемо детальніше побудову обчислювальних схем для випадку, коли магнітне поле в плазмовому шнурі задається наступним чином (модель робіт [6, 13]):

$$B_z = const \neq 0, \quad B_\phi(r) = B_\phi(r_0) \frac{r}{r_0}, \quad (2.46)$$

Магнітне поле (2.46) повинно задовільняти умові магнітостатики (2.4)
 $\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{B_\phi^2}{r} = 0$, звідки, інтегруючи дане диференційне рівняння, отримуємо

наступний вираз для тиску: $p(r) = p_0 - B_\phi^2(r_0) \frac{r^2}{r_0^2}$, $p_0 > B_\phi^2(r_0)$.

Враховуючи таку конфігурацію, запишемо рівняння (2.19) у більш компактній формі:

$$\frac{d}{dr} \left(\tilde{A}(r) \cdot \frac{d}{dr} (r \cdot \xi) \right) + \left(2r \cdot \frac{d\tilde{B}}{dr} \right) \xi - \tilde{C}(r) \xi = 0, \quad (2.47)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{A}(r) &\equiv \frac{\rho(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_z^2 + \frac{m^2}{r^2}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\rho \left(\omega^2 - k_{\parallel}^2 \frac{B^2}{\rho} \right)}{k_z^2 + \frac{m^2}{r^2}} \cdot \frac{1}{r} = \\ &= \frac{\rho \left(\omega^2 - \frac{B^2}{\rho} \cdot \frac{1}{r^2} \left(m \cdot \frac{B_\phi}{B} + k_z \cdot r \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2 \right)}{k_z^2 + \frac{m^2}{r^2}} \cdot \frac{1}{r} = \\ &= \frac{\rho \left(r^2 \omega^2 - \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(m \cdot \frac{B_\phi}{B} + k_z \cdot r \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2 \right)}{r^2 k_z^2 + m^2} \cdot \frac{1}{r} = \\ &= \frac{\rho \left(r \omega^2 - \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(m \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2 \cdot r \right)}{r^2 k_z^2 + m^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(r) &\equiv \frac{B \cdot B_\phi}{r^2} \cdot \frac{k_{\parallel} \cdot \frac{m}{r}}{k_z^2 + \frac{m^2}{r^2}} = \left(\frac{B \cdot B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \frac{\left(\frac{m}{r} \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} r \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right) \frac{m}{r}}{k_z^2 + \frac{m^2}{r^2}} = \\ &= \frac{B \cdot B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\left(\frac{m}{B \cdot r_0} \cdot B_\phi(r_0) + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right) \frac{m}{r}}{k_z^2 r^2 + m^2} = \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{\frac{m^2}{r_0} \cdot B_\phi(r_0) + k_z m B_z}{k_z^2 r^2 + m^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(r) &\equiv \rho \cdot \left(\omega^2 - \omega_A^2 \right) + 2B_\phi \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\phi}{r} \right) - \frac{4 \frac{B_\phi^2(r_0)}{r_0^2}}{k_z^2 + \frac{m^2}{r^2}} \cdot \frac{k_z^2 \omega_A^2}{\omega^2 - \omega_A^2} = \rho \cdot \left(\omega^2 - k_{\parallel}^2 \cdot \frac{B^2}{\rho} \right) - \\ &- \frac{4 \frac{B_\phi^2(r_0)}{r_0^2}}{k_z^2 + \frac{m^2}{r^2}} \cdot \frac{k_z^2 \cdot \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(m \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2}{\omega^2 - \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(m \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2} = \\ &= \rho \cdot \left(\omega^2 - \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(\frac{m}{r} \cdot \frac{B_\phi}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2 \right) - \\ &- \frac{4 \frac{B_\phi^2(r_0)}{r_0^2}}{k_z^2 + \frac{m^2}{r^2}} \cdot \frac{k_z^2 \cdot \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(m \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2}{\omega^2 - \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(m \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2} = \\ &= \rho \omega^2 - B^2 \left(m \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2 - \\ &- \frac{4r^2 \frac{B_\phi^2(r_0)}{r_0^2}}{r^2 k_z^2 + m^2} \cdot \frac{k_z^2 \cdot \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(m \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2}{\omega^2 - \frac{B^2}{\rho} \cdot \left(m \cdot \frac{B_\phi(r_0)}{r_0} \cdot \frac{1}{B} + k_z \cdot \frac{B_z}{B} \right)^2}.\end{aligned}$$

Для приведеного рівняння застосуємо метод Петрова-Гальоркіна і отримаємо схему:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=0}^{M+1} \left(\int_0^{r_0} \tilde{A}(r) \cdot \left(N_j(r) + r \cdot N_j'(r) \right) \cdot W_i'(r) dr \right) a_j + \\
& + \sum_{j=0}^{M+1} \left(\int_0^{r_0} \left(2r \cdot \tilde{B}'(r) - \tilde{C}(r) \right) \cdot W_i(r) \cdot N_j(r) dr \right) a_j = 0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Враховуючи граничні умови, можна переписати схему (2.48) наступним чином:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^M \left\{ \int_0^{r_0} \left(2r \tilde{B}'(r) - \tilde{C}(r) \right) W_i(r) N_j(r) dr - \int_0^{r_0} \tilde{A}(r) \cdot \left(N_j(r) + r \cdot N_j'(r) \right) \cdot W_i'(r) dr \right\} a_j = \\
& = \left(\int_0^{r_0} \tilde{A}(r) \cdot \left(N_0(r) + r \cdot N_0'(r) \right) \cdot W_i'(r) dr \right) a_0 + \\
& + \left(\int_0^{r_0} \tilde{A}(r) \cdot \left(N_{M+1}(r) + r \cdot N_{M+1}'(r) \right) \cdot W_i'(r) dr \right) a_{M+1} - \\
& - \left(\int_0^{r_0} \left(2r \cdot \tilde{B}'(r) - \tilde{C}(r) \right) W_i(r) N_0(r) dr \right) a_0 - \\
& - \left(\int_0^{r_0} \left(2r \cdot \tilde{B}'(r) - \tilde{C}(r) \right) W_i(r) N_{M+1}(r) dr \right) a_{M+1}.
\end{aligned}$$

2.2.2 Побудова базисних та вагових функцій

Розглянемо побудову базисних функцій. У якості базисних функцій N_i оберемо таку, що дорівнює одиниці у вузловій точці i та спадаюче-лінійна на прилеглих до точки i елементах (стандартні кусково-лінійні елементи [16]).

Питання вибору набору вагових функцій $\{W_i\}$ є дуже важливим. При $W_i = N_i$, тобто коли набір вагових функцій співпадає з набором базисних функцій, отримуємо стандартний метод Гальоркіна, що є нестійким. Відомо, що різницеві схеми з апроксимацією похідної проти потоку є стійкими. Чи можна підібрати такі вагові функції, щоб досягти аналогічного результату? Логічно припустити, що вагова функція повинна враховувати з більшою "вагою" значення величин, що лежать вище потоку [29]. Сформулюємо загальні вимоги до вагових функцій: функція $W_i(x)$ повинна бути неперервною на відрізку $S = [L_1; L_2]$, кусково-диференційованою,

дорівнювати одиниці у вузлі i , $W_i(x_i)=1$ та нулю у вузлах, сусідніх до i , тобто $W_i(x_{i-1})=W_i(x_{i+1})=0$. Крім того, вагова функція повинна дорівнювати нулю для всіх x , що не належать об'єднанню елементів, сусідніх до вузла i , тобто $W_i(x)=0$ при $x \notin [x_{i-1}; x_i] \cup [x_i; x_{i+1}]$. Додатковою вимогою, що являється вирізняючою рисою методу Петрова-Гальоркіна є вимога, що вагові функції $W_i(x)$ повинні мати більшу вагу зі сторони набігаючого потоку.

Рівняння (2.18)-(2.19) зводиться до рівняння типу конвекції-дифузії-реакції

$$\hat{k}(r) \frac{d\xi_r}{dr} - \frac{d^2\xi_r}{dr^2} + \hat{c}(r)\xi_r = f(r).$$

У роботі [30] запропоновано обрати вагові функції наступного вигляду:

$$W_i(x) = N_i(x) + \alpha_i W_i^*(x), \quad (2.49)$$

де параметр α - настроювальний параметр, від вибору якого залежать властивості схеми, а функція $W_i^*(x)$ на інтервалі $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ задовольняє наступні умови:

$$W_i^*(x_{i-1}) = W_i^*(x_i) = W_i^*(x_{i+1}) = 0,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} W_i^*(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_i(x) dx = \frac{h}{2}, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} W_i^*(x) dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} N_i(x) dx = -\frac{h}{2}.$$

За межами інтервалу $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ функція $W_i^*(x)$ тотожно дорівнює нулю. При

$\alpha = 1$ отримуємо $\int_{x_{i-1}}^{x_i} W_i(x) dx = h$, $\int_{x_i}^{x_{i+1}} W_i(x) dx = 0$. Це означає, що середнє значення

вагової функції $W_i(x)$ дорівнює 1 на інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$, тобто зі сторони набігаючого потоку, і дорівнює 0 на $[x_i, x_{i+1}]$. Можна пересвідчитись безпосереднім підрахунком інтегралів, що всі ці умови задовольняє функція $W_i^*(\lambda) = 3\lambda(1-\lambda)$, де $\lambda = (x_i - x)/h$ при $x \in [x_{i-1}; x_i]$, $\lambda = (x_{i+1} - x)/h$ при $x \in [x_i; x_{i+1}]$ та $\lambda = 0$ при $x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}]$. Описані вагові функції у одновимірному випадку можна побудувати й дещо іншим (еквівалентним) чином. А саме, представимо вагову функцію як

$$W_i(x) = \begin{cases} W_i^-(x), & x \in [x_{i-1}; x_i], \\ W_i^+(x), & x \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}], \end{cases}$$

$W_i^-(x) = a_i^- + b_i^- x + c_i^- x^2$ і $W_i^+(x) = a_i^+ + b_i^+ x + c_i^+ x^2$. Необхідність виконання ваговою функцією висунутих до неї вимог тягне за собою наступні рівності:

$$\begin{aligned} W_i^-(x_{i-1}) &= 0, \quad W_i^-(x_{i-1,i}) = 0,5 + 0,75\alpha_i, \quad W_i^-(x_i) = 1, \\ W_i^+(x_{i+1}) &= 0, \quad W_i^+(x_{i+1,i}) = 0,5 - 0,75\alpha_i, \quad W_i^+(x_i) = 1, \end{aligned}$$

де $x_{i-1,i} = (x_{i-1} + x_i)/2$, $x_{i+1,i} = (x_{i+1} + x_i)/2$. Використовуючи виписані рівності, отримаємо наступні системи для визначення коефіцієнтів a_i^- , b_i^- , c_i^- , a_i^+ , b_i^+ , c_i^+ :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 \\ 1 & x_{i-1,i} & x_{i-1,i}^2 \\ 1 & x_i & x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i^- \\ b_i^- \\ c_i^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 + 0,75\alpha_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 \\ 1 & x_{i+1,i} & x_{i+1,i}^2 \\ 1 & x_i & x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i^+ \\ b_i^+ \\ c_i^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 - 0,75\alpha_i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В роботі [30] запропоновано обрати стабілізуючі параметри α_i у вигляді:

$$\alpha_i = \frac{2\hat{k}_i h}{12 + 3\hat{c}_i h^2 \varphi_*}, \quad \varphi_* \equiv \frac{1 + \sin^2 \frac{\pi h}{2}}{3 - 3 \sin^2 \frac{\pi h}{2}}, \quad 2\hat{k}_i h \leq 12 + 3\hat{c}_i h^2 \varphi_*. \quad (2.50)$$

За умови, що $2\hat{k}_i h \leq 12 + 3\hat{c}_i h^2 \varphi_*$, формули (2.50) дають оптимальний чисельний розв'язок у сенсі півнорми $|g|_1 = \left(\int_{\Omega} \left| \frac{dg}{dx} \right|^2 d\Omega \right)^{1/2}$ простору Соболєва H^1 . Проте, коли дана нерівність порушена, вирази (2.50) можуть давати значення стабілізуючих параметрів, що за своєю абсолютною величиною перевищують одиницю, що, як відомо (див. [13, 15, 17, 30]), може призводити до внесення в схему надмірної штучної дисипації та, внаслідок цього, до виникнення значних похибок (тим більших, чим більшим буде значення швидкості конвекції). Це зазначено і в [30]. Тому пропонується обрати стабілізуючі параметри вагових функцій у вигляді:

$$\alpha_i = \coth \left(\frac{2\hat{k}_i h}{4 + \hat{c}_i h^2 \varphi_*} \right) - \frac{4 + \hat{c}_i h^2 \varphi_*}{2\hat{k}_i h}, \quad \varphi_* \equiv \frac{1 + \sin^2 \frac{\pi h}{2}}{3 - 3 \sin^2 \frac{\pi h}{2}}. \quad (2.51)$$

Абсолютна величина визначених таким чином коефіцієнтів не перевищує одиниці,

що протидіє виникненню надмірної штучної дисипації. Варто також відзначити, що при малих значеннях сіткового кроку h запропоновані параметри (2.51) з точністю до $O(h^3)$ апроксимують параметри (2.50). Обчислювальні експерименти свідчать (див. розділ 3), що формули (2.51) дають H^1 -оптимальний чисельний розв'язок за умови $2\hat{k}_i h > 12 + 3\hat{c}_i h^2 \varphi_*$ у сенсі соболевської півнорми; теоретично це слідує з теорем, доведених в [30]. Дослідимо локальну (чебишевську) похибку ψ методу Петрова-Гальоркіна при використанні формул (2.51) при інтегруванні рівняння конвекції-дифузії-реакції. Позначивши через L_h різницевий оператор віповідної різницевої схеми МПГ та вважаючи $u \in C^{(6)}$, $f \in C^{(4)}$ (для використанні теорем про середнє при оцінці інтегралів $(f, W_i)_0$) отримаємо вираз для $\psi(x_i) = (f, W_i)_0 / h - (L_h u)(x_i)$:

$$\begin{aligned}
 \psi(x_i) &= f(x_i) - \frac{h\alpha_i}{2} f'(x_i) + \frac{h^2}{12} f''(x_i) - \frac{h^3\alpha_i}{30} f'''(x_i) - \left(k \left(u'(x_i) + \frac{h^2}{6} u''(x_i) \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(1 + \frac{kh\alpha_i}{2} \right) \left(u''(x_i) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) \right) + c \left(u(x_i) - \frac{h\alpha_i}{2} u'(x_i) + \frac{h^2}{6} u''(x_i) - \frac{h^3\alpha_i}{12} u'''(x_i) \right) \right) + \\
 &+ O(h^4) = -\frac{h\alpha_i}{2} f'(x_i) + \frac{h^2}{12} f''(x_i) - \frac{kh^2}{6} u'''(x_i) + \frac{h^2}{12} (ku''(x_i) + cu''(x_i) - f''(x_i)) + \\
 &+ \frac{kh\alpha_i}{2} u''(x_i) + \frac{ch\alpha_i}{2} u'(x_i) - \frac{ch^2}{6} u''(x_i) + O(\alpha_i h^3 + h^4) = -\frac{h\alpha_i}{2} f'(x_i) - \\
 &- \frac{kh^2}{12} (ku''(x_i) + cu'(x_i) - f'(x_i)) + \left(\frac{kh\alpha_i}{2} - \frac{ch^2}{12} \right) u''(x_i) + \frac{ch\alpha_i}{2} u'(x_i) + O(\alpha_i h^3 + h^4) = \\
 &= \left(\frac{kh^2}{12} - \frac{\alpha_i h}{2} \right) f'(x_i) + \left(\frac{ch\alpha_i}{2} - \frac{ckh^2}{12} \right) u'(x_i) + \left(\frac{kh\alpha_i}{2} - \frac{ch^2}{12} - \frac{k^2h^2}{12} \right) u''(x_i) + \\
 &+ O(\alpha_i h^3 + h^4) = \left(\frac{kh^2}{12} - \frac{(kh/6 + O(h^3))h}{2} \right) f'(x_i) + \frac{ch}{2} \left(\frac{kh}{6} + O(h^3) - \frac{kh}{6} \right) u'(x_i) + \\
 &+ \left(\frac{kh(kh/6 + O(h^3))}{2} - \frac{ch^2}{12} - \frac{k^2h^2}{12} \right) u''(x_i) + O(h^4) = O(ch^2 + h^4).
 \end{aligned}$$

Звідси видно, що, у загальному випадку коли присутня реакція ($c \neq 0$), апріорна

локальна похибка методу Петрова-Гальоркіна з використанням запропонованих виразів (2.51) буде другого порядку точності; коли ж реакційні процеси відсутні, то локальна похибка буде четвертого порядку відносно кроку сітки. Слід відзначити, проте, що в проведених обчислювальних експериментах реальний порядок збіжності при $c \neq 0$ дорівнював теж 4, тобто спостерігалось явище суперзбіжності у вузлах сітки.

2.3 Висновки

Даний розділ присвячений опису чисельних схем, що були побудовані для систем МГД-рівнянь та рівняння малих коливань у плазмовому шнурі. Для чисельного моделювання було вирішено застосувати метод Петрова-Гальоркіна (метод проекційного типу), адже він є досить гнучким як з точки зору врахування граничних і додаткових умов, так і з точки зору невибагливості до диференційного оператора задачі. Були представлені підготовчі викладки, які необхідні для подальшого комп’ютерного моделювання поставленої задачі.

Розглянуто питання вибору стабілізуючих параметрів у методі Петрова-Гальоркіна та запропоновано їх авторську модифікацію. Такий підхід дозволяє запобігти надлишковій штучній дифузії у різницевій схемі, а також дає оптимальний розв’язок у сенсі Соболевської півнорми H_1 .

3 ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

3.1 Структура програмного забезпечення

Структура ПЗ представлена на рис. 3.1 і складається з наступних блоків:

Введення вхідних даних. Вхідними параметрами є фізичні параметри середовища (конфігурація магнітного поля, його щільність, тощо), параметри для граничних умов, параметри дискретизації області (кількість вузлів).

Дискретизація області. На основі вхідних параметрів – границь області розв'язання задачі та кількості вузлів, проводиться розбиття області на відрізки (елементи).

Формування базисних та вагових функцій. Для кожного елемента розбиття обчислюються базисні та вагові функції.

Обчислення інтегралів. За допомогою квадратур Гаусса проводиться обчислення інтегралів для кожного елемента.

Формування системи алгебраїчних рівнянь. Згідно схеми (2.48) формується система рівнянь, розмірність якої відповідає кількості вузлів розбиття.

Прогонка. Оскільки згідно схеми (2.48) отримана система рівнянь буде мати трьохдіагональну структуру, можна використати метод прогонки для її розв'язання.

Обчислення граничних умов. Проводиться обчислення граничних умов задачі у крайній точкаї області.

Формування результатів. Результатом є шукана величина ξ_r (рівняння 2.19), яка описується вектором, розмірність якого дорівнює кількості вузлів.

Побудова графіків та анімацій. Виконується графічне представлення отриманих результатів.

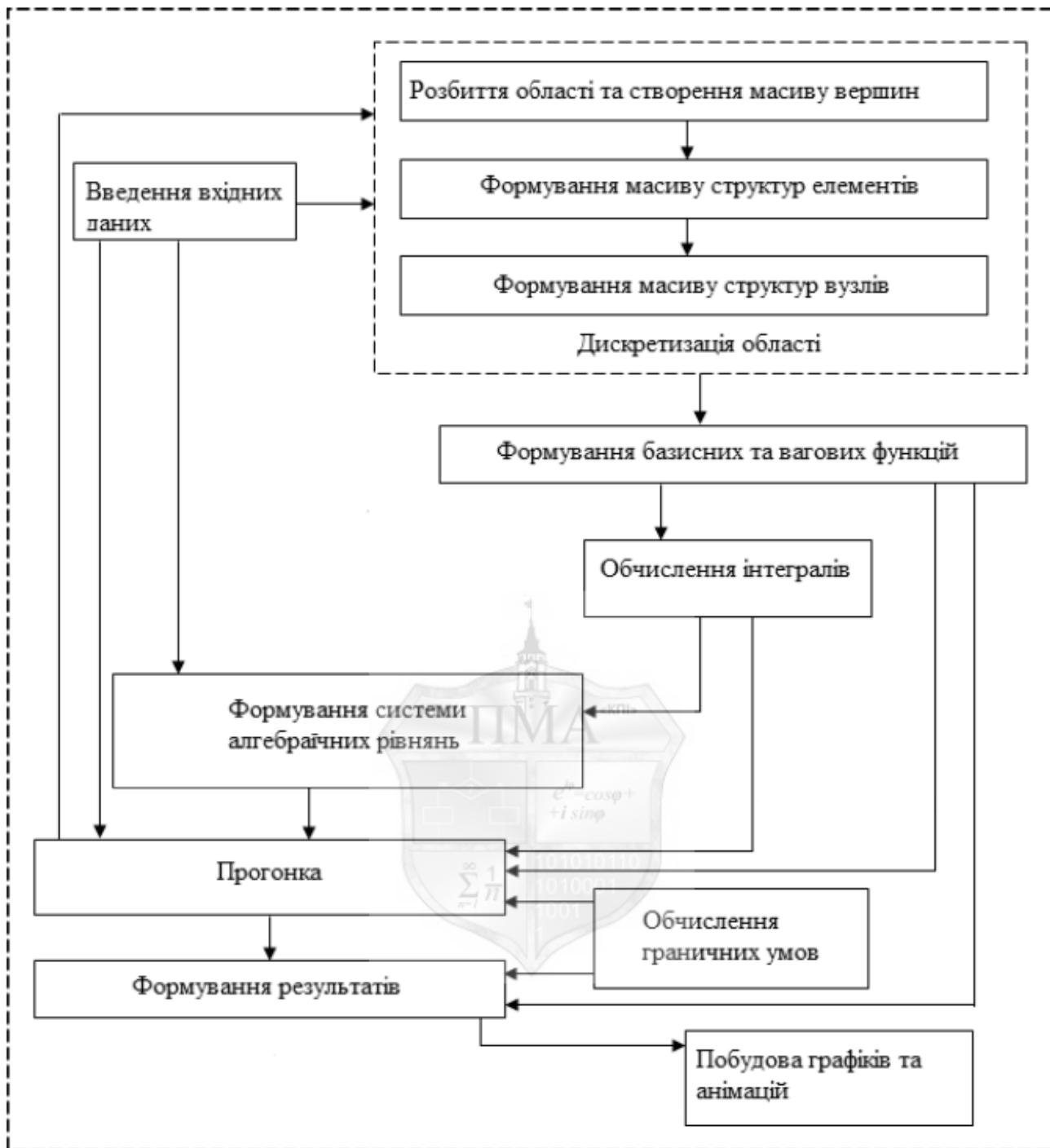


Рисунок 3.1 – Структура програмного забезпечення

3.2 Порівняння похибок обчислень при різних значеннях стабілізуючих параметрах

Розглянемо рівняння КДР

$$\hat{k}(r) \frac{d\xi(r)}{dr} - \frac{d^2\xi(r)}{dr^2} + \hat{c}(r)\xi(r) = f(r) \quad (3.1)$$

з однорідними граничними умовами першого роду, $f(r) = -k - cr$.

В таблиці 3.1 наведено розрахунки похибок для рівняння (3.1), де $\alpha_{\max,3}$ - запропонований варіант вибору стабілізуючих параметрів.

Таблиця 3.1 – Значення похибок при $k = 10^4$, $c = 10^3$

Число узлов сетки	$\alpha_i = kh/6$			$\alpha_i = \alpha_{\max}$			$\alpha_i = \alpha_{\max,3}$		
	err_{H^1}	err_{L_2}	err_C	err_{H^1}	err_{L_2}	err_C	err_{H^1}	err_{L_2}	err_C
50	70,68	0,4	0,94	70,68	0,4	0,94	70,33	0,08	$5,69 \cdot 10^{-6}$
100	70,6	0,21	0,89	70,6	0,21	0,89	69,92	0,057	$5,1 \cdot 10^{-6}$
200	70,28	0,10	0,79	70,28	0,10	0,79	69,29	0,039	$5,02 \cdot 10^{-6}$
500	68,52	0,04	0,55	68,52	0,04	0,55	67,09	0,023	$5 \cdot 10^{-6}$
1000	64,36	0,019	0,30	64,36	0,019	0,30	63,25	0,014	$4,96 \cdot 10^{-6}$
2000	55,34	$8,6 \cdot 10^{-3}$	0,097	55,34	$8,6 \cdot 10^{-3}$	0,097	55,02	$7,57 \cdot 10^{-3}$	$3,96 \cdot 10^{-6}$
4000	40,11	$3,2 \cdot 10^{-3}$	0,016	40,11	$3,2 \cdot 10^{-3}$	0,016	40,092	$3,04 \cdot 10^{-3}$	$1,85 \cdot 10^{-6}$
8000	23,74	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$13,3 \cdot 10^{-4}$	23,74	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$13,3 \cdot 10^{-4}$	23,73	$9,28 \cdot 10^{-4}$	$5,42 \cdot 10^{-7}$
12000	16,45	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	16,45	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	16,45	$4,30 \cdot 10^{-4}$	$2,24 \cdot 10^{-7}$
16000	12,52	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$7,8 \cdot 10^{-5}$	12,52	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$7,8 \cdot 10^{-5}$	12,52	$2,47 \cdot 10^{-4}$	$1,25 \cdot 10^{-7}$

3.3 Обчислення коливань плазми у циліндричному шнурі

Розглянемо задачу коливань плазми у циліндричному шнурі, яка описується рівнянням (2.19). Для однозначного виділення розв'язку необхідно задати фізичні параметри рівняння (магнітне поле), а також граничні умови. Далі ми розглянемо три найбільш поширені конфігурації магнітних полів.

Приклад 1. Розглянемо найбільш просту конфігурацію магнітного поля, в якій магнітне поле (яке у нашому випадку описується параметрами B_φ і B_z) буде мати вигляд:

$$B_z = \text{const} \neq 0,$$

$$B_\varphi(r) = \frac{B_\varphi(r_0) \cdot r}{r_0}, \quad (3.2)$$

Параметри рівняння візьмемо наступними:

$$r_0 = 1,$$

$$B_z = 1,$$

$$B_\varphi(r_0) = 1,$$

$$\rho = 1,$$

$$k_z = -\frac{n}{r_0} = -\frac{25}{r_0},$$

$$m = 90,$$

$$\omega = 50.$$

Задачу розглядаємо на відрізку $0 \leq r \leq r_0$. Задамо граничні умови:

$$\begin{aligned} \xi(0) &= 1, \\ \xi(r_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Нульова гранична умова на правому кінці ставиться для екранування магнітного поля всередині шнура. В нулі можна поставити довільну неоднорідну граничну умову 1-го роду (згідно фізичного сенсу мода в точці $r = 0$ мода повинна бути обмеженою).

Параметри сітки оберемо наступні:

$M = 500$ – кількість вузлів сітки,

$h = \frac{r_0}{M+1}$ – крок сітки.

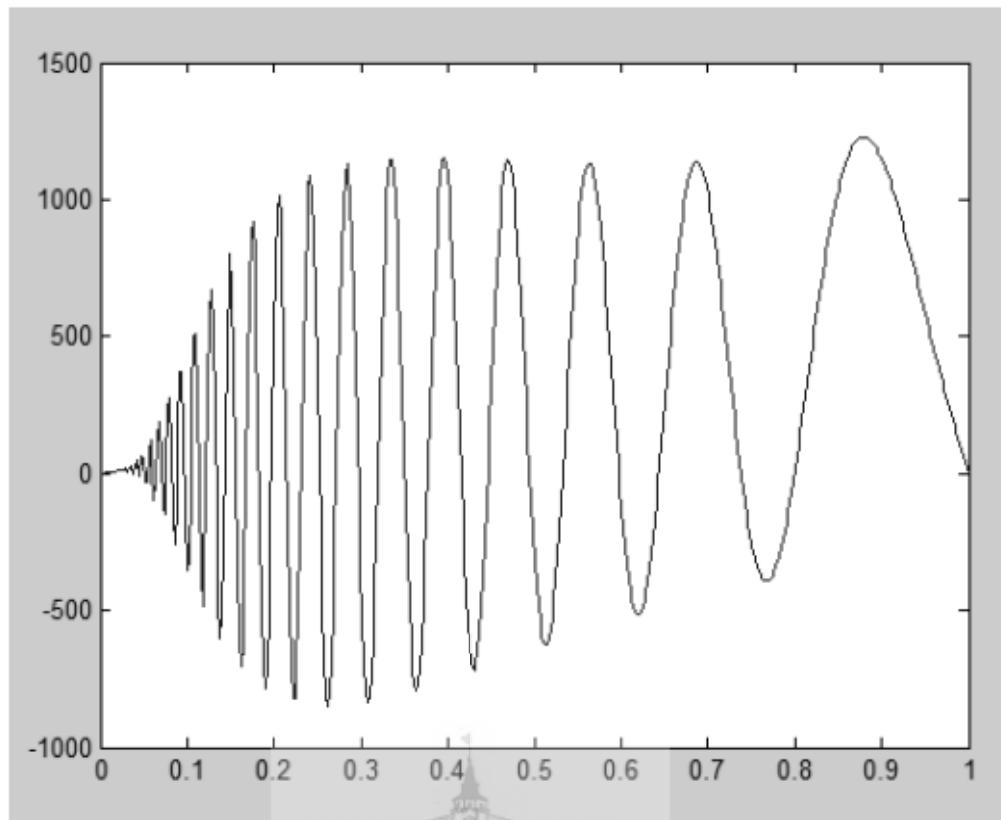


Рисунок 3.2 – Графік функції $\xi(r)$

На рис. 3.3 представлений графік розв'язку $\xi(r)$.

Приклад 2. У прикладі 1 припускалось, що вся магнітна трубка є однорідною (це є найпростішою моделлю). Розглянемо більш складну модель з магнітним полем вигляду:

$$\begin{aligned} B_z &= \begin{cases} \sqrt{B_z^2(0) - B_\phi^2(r)}, & r \leq a \\ B_z^2(0), & r > a \end{cases} \\ B_\phi(r) &= \begin{cases} B_\phi(a) \frac{r}{a}, & r \leq a \\ B_\phi(a) \frac{r}{a}, & r > a \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Відомо що [7] розподілення температур в корональних петлях не є однорідним, в так званій «оболонці» ($r > a$) шнура вона зменшується. Згідно цих даних оберемо більш реалістичну функцію густини (у попередньому прикладі вона була константою).

$$\rho = \begin{cases} \text{const} = \rho_0, & r \leq a \\ \frac{\rho_0}{r^2}, & r > a \end{cases} \quad (3.5)$$

Всі інші параметри візьмемо такими ж, як в прикладі 1.

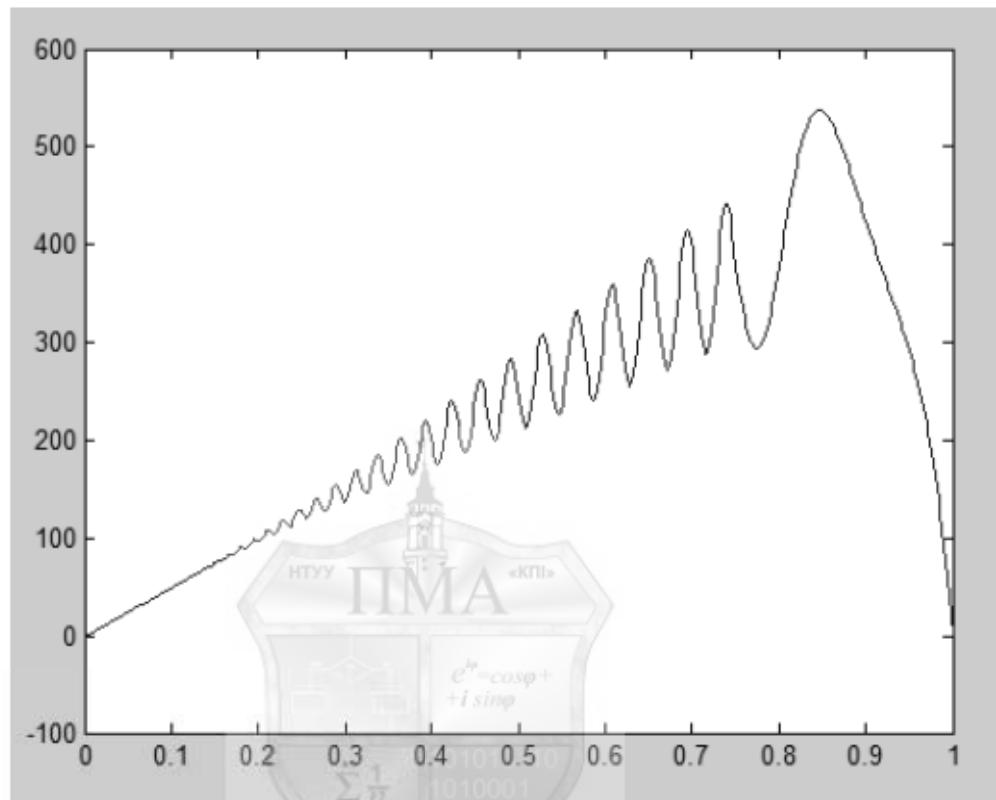


Рисунок 3.3 – Графік функції $\xi(r)$

На рис. 3.3 представлений графік розв'язку $\xi(r)$.

3.4 Випробування схеми на адекватність

Збіжність побудованої схеми можна підтвердити, побудувавши послідовно розв'язки, вдвічі збільшуочи кількість вузлів, та занаходячи різницю у співпадаючих вузлах для двох сусідніх розв'язків. Якщо ця різниця (далі будемо називати її

похибою) зменшується зі збільшенням кількості вузлів, це свідчить про збіжність схеми.

Було проведено дослідження похибки для 100, 200, 400, 800, 1600 вузлів. Таблиця 3.2 демонструє похибки розв'язку між сусідніми кількостями вузлів. З неї видно, що похибка зменшується зі збільшенням кількості вузлів.

Таблиця 3.2 – Похибка розв'язку

100/200	200/400	400/800	800/1600
$0,7885 \cdot 10^{-3}$	$0,3942 \cdot 10^{-3}$	$0,1969 \cdot 10^{-3}$	$0,0981 \cdot 10^{-3}$

Задля того, щоб перевірити отриману схему (2.48) на адекватність (чи дійсно вона є наближенням шуканого розв'язку), спростимо вихідне рівняння (2.19),

зробивши припущення, що $\varepsilon = \frac{a}{L} \ll 1$, де a – радіус циліндра, L – його довжина.

Враховуючи, що $k_z = \frac{n}{L}$, буде справедлива нерівність $\frac{m^2}{r^2} \gg k_z^2$. Враховуючи дане припущення, опустимо у рівнянні (2.19) доданки, що містять ε^2 , тоді (припускаючи, що $B_z = \text{const} \neq 0$) отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left((\rho\omega^2 - F^2) \cdot r \frac{d}{dr} (r\xi) \right) + \frac{dF^2}{dr} \xi - (\rho\omega^2 - F^2) \frac{m^2 \xi}{r} + \\ & + 4 \frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{k_z^2 F^2}{(\rho\omega^2 - F^2)} r\xi = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

тут $F = \frac{m}{r} B_\varphi + k_z B_z = \frac{B_\varphi}{r} (m + nq)$, $q = \frac{r B_z}{L B_\varphi}$.

Для подальшого спрощення покладемо, що B_φ і B_z описуються виразами (3.2).

Тоді рівняння (3.6) зводиться до рівняння Бесселя:

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \Phi + k_z^2 \lambda^2 \Phi = 0, \quad (3.7)$$

де $\lambda^2 = 4 \frac{B_\varphi(a)^2}{a^2} \frac{F^2}{(\rho\omega^2 - F^2)^2}$, а $\Phi = r\xi$.

Один з частинних розв'язків рівняння (3.7) є вираз:

$$\Phi = \text{const} \cdot J_m(\lambda k_z r), \quad (3.8)$$

тут *const* визначається з однієї з граничних умов.

Для наочності результатів задамо наступні параметри рівняння:

$$r_0 = 20,$$

$$B_z = 1,$$

$$B_\varphi(r_0) = 1,$$

$$\rho = 1,$$

$$k_z = -\frac{n}{L} = -\frac{1}{1000},$$

$$m = 1.$$

Ліву граничну умову візьмемо $\xi(0) = 0,5$, права, як і раніше, залишається нульовою. Кількість вузлів така ж, як і у попередніх прикладах. Порівняння графіків аналітичного та чисельного розв'язків представлені на рис. 3.4-3.5.

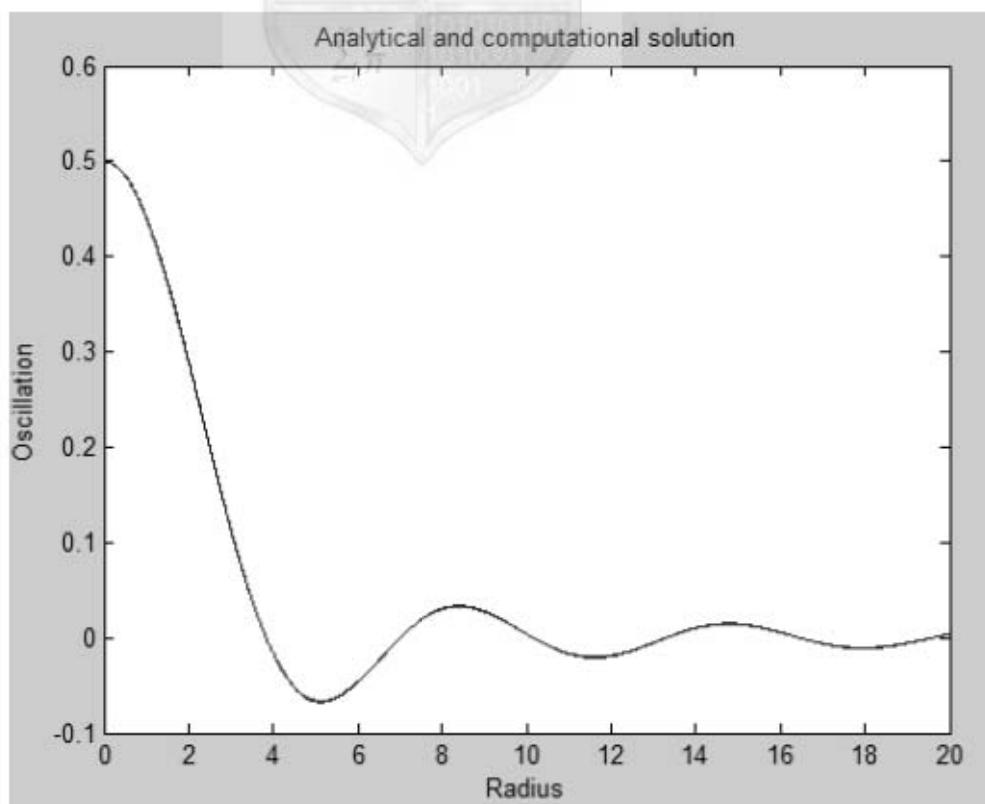


Рисунок 3.4 – Порівняння аналітичного та чисельного розв’язків (червоний – аналітичний, синій - чисельний)

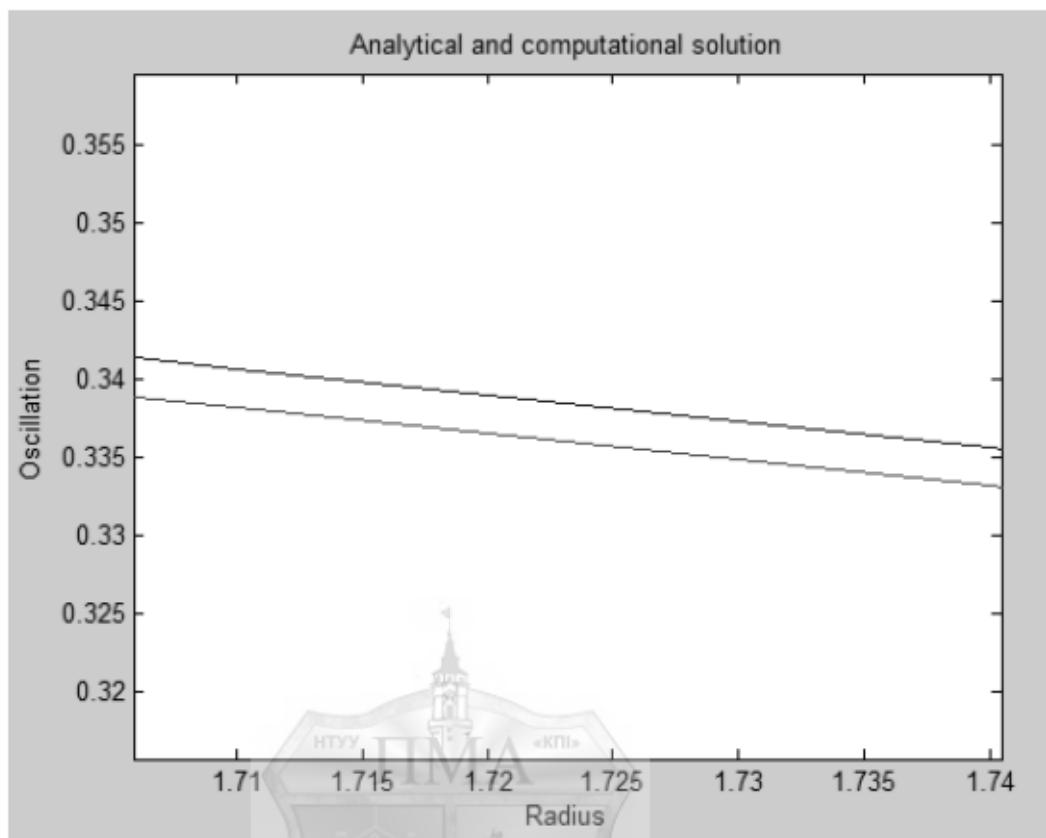


Рисунок 3.5 – Порівняння аналітичного та чисельного розв’язків (червоний – аналітичний, синій - чисельний)

Графік похибки (похибкою в даному випадку є максимальна різниця між чисельним та аналітичним розв’язком) представлено на рис. 3.6.

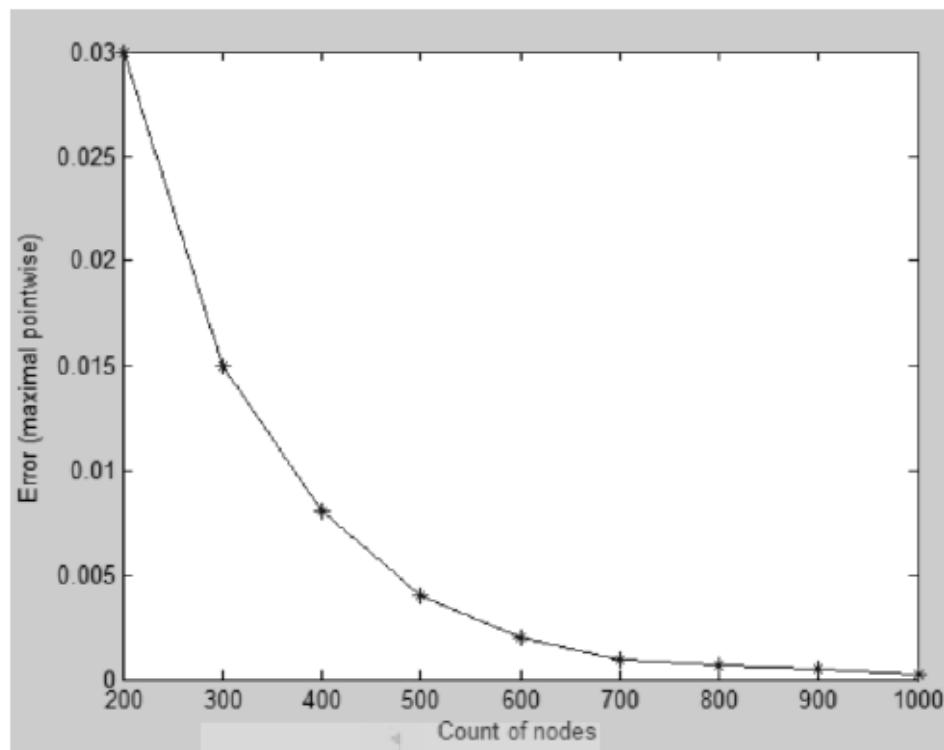


Рисунок 3.6 – Графік похибки в залежності від кількості вузлів

3.5 Висновки

У цьому розділі було представлено архітектуру ПЗ, призначеного для проведення чисельних експериментів побудованої схеми для коливань у плазмовому шнурі (рівняння 2.19), а також чисельні розрахунки.

Перші два чисельних приклади демонструють отримані розв'язки для рівняння 2.19 з конфігурацією магнітного поля, що відповідає сучасним теоретичним уявленням про магнітне поле у плазмових шнурах. Розв'язки приведені для досить високої моди (90-ї), тому мають велику кількість екстремумів.

Далі приведені чисельні приклади, що доводять адекватність чисельної схеми: проведено порівняння чисельного та аналітичного розв'язку (для частинного випадку), а також досліджено як збігається розв'язок зі збільшенням кількості вузлів.

ВИСНОВКИ

Робота присвячена розробці обчислювальних схем для чисельного моделювання процесів коливань плазми в циліндричній геометрії, що відіграє важливу роль у теоретичних та експериментальних дослідженнях різноманітних фізичних явищ у космічній та високотемпературній плазмі (зокрема, при дослідженні космічної погоди, збурень магнітосфери Землі під дією сонячного вітру, корональних викидів сонячної маси тощо) [14, 31, 32]. Результати проведеного дослідження полягають у наступному:

а) Зроблено детальний огляд математичних моделей фізичних процесів, зокрема систем МГД рівнянь, що здатні описувати весь багатовид явищ у космічній плазмі. Оскільки задача чисельного інтегрування МГД систем є надзвичайно складною і наштовхується на ряд перешкод (як математичного, так і суто технічного характеру у вигляді існуючих обмежень на обчислювальні ресурси), тому для чисельного моделювання фізичних процесів у плазмових шнурах було вирішено використовувати спрощені скінченновимірні моделі (в залежності від типу досліджуваних хвиль). В роботі зроблено акцент на моделювання дрібномасштабних коливань (або альвенівських хвиль), для цього використані рівняння праці [14], що описують МГД-збурення у циліндричних шнурах круглого перерізу.

б) Для чисельного моделювання було прийнято рішення використовувати глобальний підхід (на противагу локальному, заснованому на використанні прогнозуючих моделей регресійного типу), а саме проекційні чисельні методи розв'язання систем рівнянь конвективно-дифузійного типу, оскільки фізичні процеси, що розглядаються, можна віднести до процесів типу КДР (конвекції-дифузії-реакції). Серед усіх методів та підходів (сіткові, варіаційні, проекційні, комбіновані методи тощо) було обрано саме проекційний підхід Петрова-Гальоркіна, оскільки він є зручним з точки зору легкості врахування додаткових умов задачі, можливості впливу на штучну (схемну) дисипацію, невибагливості до оператора задачі.

- в) На базі результатів статті [30] запропоновано нові вирази для вибору стабілізуючих параметрів у методі Петрова-Гальоркіна з кусково-квадратичними ваговими функціями для рівнянь конвекції-дифузії-реакції з домінуючою конвекцією.
- г) На основі методу Петрова-Гальоркіна з запропонованим вибором стабілізуючих параметрів вперше розроблено обчислювальні схеми для рівнянь коливань (спеціалізованого виду) плазми в циліндричних плазмових шнурах.
- д) Удосконалено обчислювальні схеми методу Петрова-Гальоркіна для систем рівнянь магнітної гідродинаміки у адіабатичному наближенні.
- е) Проведено ряд чисельних експериментів для ілюстрації «адекватності», збіжності та високої ефективності (в плані точності отримуваних за їх допомогою результатів) побудованих схем. Зокрема, обчислення показали, що при збільшенні кількості вузлів сітки похибка зменшується, що свідчить про збіжність схем; це також підтверджується проведеними порівняннями чисельного розв'язку з аналітичним (який вдалося відшукати у частинному випадку за припущення, що відношення радіусу шнура до його довжини набагато менше за одиницю). Також проведено теоретичне дослідження локальної похибки апроксимації (у чебишевській нормі) запропонованих обчислювальних схем; зокрема, встановлено, що для конвективно-дифузійних процесів без реакційних складових похибка має четвертий порядок малості відносно кроків сітки (тобто, має місце явище суперзбіжності запропонованих схем у вузлах сітки), що на два порядки вище порівняно зі стандартними (класичними) проекційними методами типу Петрова-Гальоркіна [6, 9, 11, 28, 29]. Так, проведені обчислювальні експерименти для процесів з домінуючою конвекцією показали зменшення середньоквадратичної похибки до 5 разів на грубих сітках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К. Математические модели спрошных сред. – К.: Наукова думка, 2010. – 550 с.
2. Кременецький І.О., Черемних О.К. Космічна погода: механізми та прояви. – К.: Наукова думка, 2009. – 143 с.
3. Загородний А. Г., Черемных О. К. Введение в физику плазмы. – К.: Наукова думка, 2014 – 694 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. – Уравнения математической физики. – 4-е изд.– М.: Мир, 1972 – 710 с.
5. Gabor Toth, Bart van der Holst. Adaptive numerical algorithms in space weather modelling// Journal of Computational Physics 231. – 2012. – P. 870-903.
6. Finlayson B.A. Numerical methods for problems with moving fronts. — Seattle (Wash.): Ravenna Park Publ. Inc., 1992. — 613 р.
7. Михалев Б. Б. Радиальные колебания корональных магнитных петель// Письма в астрономический журнал – т. 38, №10. – 2012, с. 746-750.
8. Прист Э.Р. Солнечная магнитогидродинамика. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 500 с.
9. Gombosi T.I., Powell K.G., De Zeeuw D.L., Clauer C.R., Hansen K.C., Manchester W.B., Ridley A.J., Roussev I.I., Sokolov I.V., Stout Q.F., Toth G. Solution Adaptive MHD for Space Plasmas: Sun-to-Earth Simulations//Computing in Science & Engineering. — 2004. — Vol.6 (2). — P.14-35.
- 10.Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.:Мир, 1985.
- 11.Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 604 p.
- 12.Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
- 13.Сальников Н.Н. О построении конечномерных математических моделей для двухмерных процессов магнитной гидродинамики с использованием метода

- Петрова-Галеркина / Н.Н. Сальников, С.В. Сирик, В.К. Белошапкин // Управляющие системы и машины — 2014. — № 4. — С. 23–32.
- 14.Черемных О. К. К теории поперечных мелкомасштабных мод в цилиндрическом плазменном шнуре// Кинематика и физика небесных тел –2015. – том 31, №5 – с. 3-19.
- 15.Сальников Н. Н., Сальникова А. Н.. Оценивание состояний систем с распределенными параметрами с использованием конечномерных моделей и локальных измерений при ограниченных помехах// Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». – 2015. – №5 – с. 76–91.
- 16.Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. – М.:Мир, 1988. – 352 с.
- 17.Сірик С. В. Обчислювальні схеми та вагові функції скінченноелементного методу Петрова-Гальоркіна для високоточного моделювання конвективно-дифузійних процесів : дис. канд. техн. наук : 26.002.02 / Сірик Сергій Валентинович ; КПІ. – К., 2015. – 300 с.
- 18.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – 5-е изд., – М.: Физматлит, 2001. – 736 с.
- 19.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – 4-е изд., – М.: Физматлит, 2001. – 656 с.
- 20.Пикельнер С.Б. Основы космической электродинамики. – М. Наука, 1966. – 408 с.
- 21.Wei H.L., Zhu D.Q., Billings S.A., Balikhin M.A. Forecasting the geomagnetic activity of the Dst index using multiscale radial basis function networks // Adv. Space Res. – 2007. –Vol. 40. – P. 1863–1870.
- 22.Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.:Наука, 1973. – 500 с.
- 23.Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 422 с.
- 24.Р. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
- 25.Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Мир, 1978. – 608 с.

- 26.Кенро Миямото. Основы физики плазмы и управляемого синтеза. – М.: Физматлит, 2007. – 424 с.
- 27.Робертс Б. Магнитогидродинамические волны на Солнце / Б. Робертс : кн. Космическая магнитная гидродинамика. – М.:Мир, 1995. – С. 112 – 143.
- 28.Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 3: Fluid Dynamics.– Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000. – 334 p.
- 29.Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. – М.:Мир, 1979. – 389 с.
- 30.Сирик С. В. Оценки точности конечноэлементного метода Петрова-Галеркина при интегрировании одномерного стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Український математичний журнал –2015. – том 67, №7 – с. 937-961.
- 31.N. Salnikov, O. Cheremnykh, A. Tsvirchkova. Spatio-temporal MHD-structures reconstruction on example of the UFL wave disturbances in magnetosphere// Third UK-Ukraine-Spain Meeting on Solar Physics and Space Science conference.
32. Сальніков М. М., Цвірчкова А. О. Обчислювальні схеми на базі проекційного підходу Гальоркіна для розв'язання задач на власні значення для хвильових рівнянь зі змінною густиною// Прикладна математика та комп'ютинг – ПМК'2016.