

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ О.Р. Чертов

«__» _____ 2015 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

зі спеціальності 6.040301 «Прикладна математика»

на тему: Програмний модуль для прогнозування державних економічних показників

Виконав: студент 4 курсу, групи КМ-11

Мельник Вадим Михайлович

Керівник: доцент кафедри ПМА Олефір О.С

Консультант з нормоконтролю: ст. викл. Мальчиков В.В.

Рецензент: к.т.н., доцент кафедри ММСА Швачко Г.Г.

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»**

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність 6.040301 «Прикладна математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.Р. Чертов

«__» _____ 2015 р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту
Мельнику Вадиму Михайловичу

1. Тема роботи «Програмний модуль для прогнозування державних економічних показників»

керівник роботи – доцент Олефір Олександр Степанович

затверджені наказом по університету від "19" травня 2015 р. № 1039-С.

2. Термін подання студентом завершеної роботи: «12» червня 2015 р.

3. Вихідні дані для виконання дипломної роботи:

– дані валового внутрішнього продукту України за період 1995-2005 р.

4. Зміст роботи:

– вивчити літературні джерела за тематикою дослідження, в тому числі методики побудови математичних моделей в прогнозуванні економічних показників

– провести аналіз методів прогнозування та макроекономічних показників

- розробити математичні моделі для коротко- і середньострокового прогнозування державних економічних показників України
 - оцінити похибку прогнозу
 - оформити документацію дипломної роботи;
5. Перелік ілюстративного матеріалу:
- ілюстрації результатів роботи програми
 - ілюстрації слайдів
6. Консультанти:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Нормоконтроль	ст.викладач Мальчиков В.В.		

7. Дата видачі завдання: «28» жовтня 2014 р.

Календарний план

з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	Вивчення літератури за тематикою роботи та збір даних	14.11.2014	
2	Проведення порівняльного аналізу існуючих математичних методів прогнозування	28.11.2014	
3	Вибір, обґрунтування та опановування методів розв'язку	17.01.2015	

4	Визначення форматів вихідних даних результатів прогнозу макроекономічних показників	1.02.2015	
5	Розробка алгоритмів	17.02.2015	
6	Проектування користувацького інтерфейсу програми	20.03.2015	
7	Розробка програмного забезпечення	11.04.2015	
8	Розробка математичних алгоритмів та підготовка контрольних прикладів	23.04.2015	
9	Розв'язування контрольних прикладів на ЕОМ	05.05.2015	
10	Оформлення дипломної роботи	01.06.2015	

Студент _____ Мельник В.М.

Керівник роботи _____ Олефір О.С.

АНОТАЦІЯ

Роботу виконано на 75 аркуші, вона містить 2 додатки та перелік посилань на використані джерела з 17 найменувань. У роботі наведено 9 рисунків та 4 таблиці.

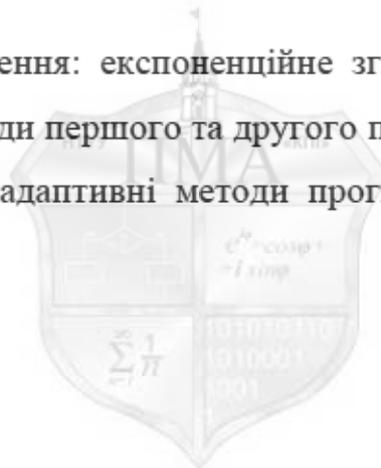
Основна мета дипломної роботи є розробка програмного забезпечення для прогнозування державних економічних показників України, представлені у вигляді часових рядів.

Об'єктом дослідження є дані щодо фінансово-економічних процесів.

Отримані результати можуть бути використані для планування економіки.

Методи дослідження: експоненційне згладжування, Хольта, Брауна, Бокса-Дженкінса, тренди першого та другого порядків.

Ключові слова: адаптивні методи прогнозування, макроекономічні показники.



ABSTRACT

The thesis consists of 75 pages, 2 additions and a list of links to the sources used with 17 titles. There are 9 pictures and 4 tables in this paper.

The main purpose of the thesis is to develop software for prediction the state economic indicators of Ukraine presented as a time series.

The object of research is the data related to the financial and economic processes.

Obtained results can be used for planning economy.

Research methods: exponential smoothing, Holt, Brown, Box-Jenkins, first and second order trends. Keywords: adaptive methods of forecasting, macroeconomic indicators.



ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ	9
ВСТУП	10
МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	12
1 МАКРОЕКОНОМІЧНІ ПОКАЗНИКИ	13
1.1 Поняття валовий внутрішній продукт (ВВП)	13
1.2 Номінальний та реальний ВВП	14
1.3 Основні методи обчислення ВВП	15
1.4 Методи прогнозування	19
1.4.1 Експертні методи прогнозування в економіці	19
1.4.2 Формалізовані методи прогнозування	20
1.5 Висновки до першого розділу	22
2 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ	23
2.1 Часові ряди і стохастичні процеси	23
2.2 Ідея методу експоненційного згладжування	26
2.2.1 Визначення початкових значень параметрів згладжування	29
2.3 Основні методи вибору коефіцієнта експоненційного згладжування a	30
2.3.1 Зауваження щодо вибору коефіцієнта згладжування	32
2.4 Моделі лінійного росту	32
2.4.1 Модель Хольта	33
2.4.2 Побудова прогнозу часового ряду	33
2.4.3 Модель лінійного росту Брауна.....	35
2.4.4 Модель Тейла-Вейджа.....	36
2.5 Висновки до другого розділу.....	41
3 ПРОГРАМА ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ	42
3.1 Основні вимоги використання програми	42

3.2 Вибір методу прогнозування	43
3.3 Вибір початкової вибірки та горизонту прогнозування	45
3.4 Вивід результатів прогнозування	45
3.5 Графіки часових рядів	46
3.6 Контрольні приклади	47
3.7 Прогнозування економічних показників України, ВВП	50
3.8 Висновок до третього розділу	52
ВИСНОВОК	53
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА	54
Додаток А Лістинг програми	56
Додаток Б Ілюстративний матеріал	71



ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ

ВВП – валовий внутрішній продукт.

ВНП – валовий національний продукт.

ВВ –валовий випуск або обсяг реалізованої продукції.

МВ – матеріальні витрати.

МНК – метод найменших квадратів.

НД – національний дохід.

ЧНП – чистий національний продукт.



ВСТУП

Макроекономічні показники, що відображають масштабні економічні явища, прогнозуються на рівні держави. Ці прогнози необхідні для використання самостійних розрахунків та застосування в бюджетному плануванні.

В макроекономічних показниках країни знаходять відображення параметри функціонування економіки, структура і потенціал її галузей, пропорції і взаємозв'язки між областями, регіонами.

Прогнози макроекономічних показників здійснюються, на декілька років вперед, в тому числі і на найближчий рік. Прогноз року корегується з врахуванням нової, що має вплив на даний показник інформації. Типовими напрямками прогнозування і макропланування в економіці є:

- забезпечення необхідних пропорцій розширення відтворення, що характеризують розвиток ключових сфер економіки і вирішення соціальних проблем;
- здійснення загальнодержавної інвестиційної і науково-технічної політики;
- формування міждержавних зовнішньоекономічних зв'язків;
- створення резервів для здійснення цільових програм і локалізації надзвичайних ситуацій;
- забезпечення оборони країни тощо.

Крім того, до прогнозів макrorівня відносяться прогнозні огляди стану економіки країни, які публікуються ЗМІ. Такі розрахунки виконуються не тільки по замовленням уряду країни, але і самостійними, незалежними особами. Окремо прогнозується розвиток державного сектору економіки. Порівняння фактичного стану економічного параметра з його прогнозним значенням дозволяє оцінити відхилення, що виникли, і виявити причини, які їх викликали. Економічний аналіз прогнозу включає:

- оцінку досягнутого потенціалу;
- виявлення тенденцій і факторів впливу;
- визначення вектора необхідних корекцій уряду по досягненню цілей розвитку суспільства.

Щоб отримати адекватну інформацію про майбутнє необхідно знання законів розвитку суспільства, особливості стану економіки країни, а також причин і рушійних сил в просторі і часі, але часто буває неможливо достатньо точно прорахувати всі варіанти, що відрізняють складні соціально-політичні і економічні прогнози країни і регіонів. Високий ступінь невизначеності майбутнього, особливо в політичному аспекті, зумовлює посилення імовірнісного характеру досягнення параметру цих прогнозів.

Економічний прогноз макропоказників має комплексний характер і розробляється з врахуванням інших прогнозів — демографічного, ресурсного, попиту, пропозиції, науково-технічного прогресу. Система прогнозування макроекономічних показників поки що не склалася, слід пройти шлях адаптації і удосконалення з врахуванням існуючого світового досвіду економічного прогнозування і особливостей суспільного розвитку в нашій країні.

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою дослідження є розробка програмного забезпечення для прогнозування державних економічних показників України, представлені у вигляді часових рядів.

Науково-практична задача, що розв'язується в даній дипломній роботі, включає наступні завдання:

- 1) аналіз апарату математичного моделювання, що застосовується при прогнозуванні макроекономічних показників;
- 2) розробка математичної моделі для прогнозування макроекономічних показників.



1 МАКРОЕКОНОМІЧНІ ПОКАЗНИКИ

В даному розділі розглядаються поняття про валовий внутрішній продукт, їх види та методи пошуку. Також розглядаються існуючі методи прогнозування макроекономічних показників.

1.1 Поняття валовий внутрішній продукт (ВВП)

Макроекономіка вивчає економічну систему держави. Кожна держава по-різному регулює економічні процеси своєї країни. Але в будь-якому випадку для того, щоб ефективно керувати економікою своєї країни, уряду необхідно мати повну картину стану економіки на даний момент та цілі, до яких уряд збирається привести економічну систему протягом певного часу. Для того щоб мати таку картину та реальнодосяжні цілі уряду, необхідно мати певні показники, які характеризували б стан економіки на даний момент. Основним показником, який оцінює результати діяльності економічної системи країни, є валовий внутрішній продукт (ВВП). І досліджуючи цей показник у динаміці, державні органи визначають напрями своєї економічної політики. ВВП - це сукупна ринкова вартість усього обсягу виробництва кінцевих товарів та послуг в економіці за один рік. Під кінцевими товарами та послугами розуміють товари та послуги, які купуються для кінцевого споживання. Наприклад, до кінцевих товарів можна віднести одяг, продукти харчування, різні комунальні послуги (енергоспоживання, водопровід, газопостачання). До ВВП не відносять виробництво проміжних товарів та послуг, які використовуються в процесі виробництва (сировина, матеріали, паливо,

рекламні послуги і т.д.). ВВП вимірюється тільки в грошовій формі. Тому щоб правильно розрахувати сукупний обсяг виробництва, необхідно, щоб усі товари та послуги, вироблені в цьому році, враховувалися тільки один раз.[2]

1.2 Номінальний та реальний ВВП

Валовий внутрішній продукт показує обсяг виробництва в цінах, які існували на час, коли цей обсяг був вироблений[10]. Такий сукупний обсяг виробництва товарів та послуг називається номінальним ВВП. Однак номінальний ВВП не ілюструє реального становища ВВП, оскільки він виражає лише того ціни періоду часу, в якому він був розроблений. Зміни в обсязі ВВП могли відбутися за рахунок збільшення цін (інфляція), економічного зростання країни і т. д. Отже, для того щоб оцінити реальну картину економічної ситуації, необхідно скоригувати номінальний ВВП. Номінальний ВВП можна скоригувати з урахуванням інфляції (збільшення цін на товари та послуги) або дефляції (зниження цін на товари та послуги). Такий скоригований показник і є реальним ВВП. Реальний ВВП розраховують за допомогою індексу споживчих цін:

$$\text{Індекс споживчих цін} = \frac{\text{ціна споживчого кошика даного року}}{\text{ціна споживчого кошика базового року}}$$

Національна економіка – це сукупність всіх господарюючих суб'єктів на території країни та резидентів поза її межами. Суб'єктами є домогосподарства, підприємства (приватний сектор), держава (державний сектор), фінансові структури і банківська сфера (фінансовий сектор), міжнародні організації (зовнішньоекономічний сектор).

Оцінку національної економіки здійснюють за допомогою системи національних рахунків. Це система взаємопов'язаних економічних показників, що відображає діяльність економіки, а саме виробництво і споживання продукції, а також формування, розподіл і перерозподіл доходів.

Особливістю системи національних рахунків є використання доданої вартості як ключового показника обсягів виробництва. Додана вартість – це внесок конкретного підприємства у створення вартості товарів та послуг в межах національної економіки.

У системі національних рахунків включають наступні показники: національне багатство.

Валовий внутрішній продукт – це сукупна вартість кінцевих товарів і послуг, вироблених на території країни, громадянами цієї країни, резидентами та іноземцями протягом певного періоду часу.

Валовий національний продукт (дохід) – це сукупна вартість кінцевих товарів і послуг, вироблених на території країни, а також за її межами громадянами даної країни. [2]

1.3 Основні методи обчислення ВВП

1) За витратами:

Згідно з методом розрахунку за витратами обсяг ВВП підраховується як сума: особистих витрат населення на кінцеве споживання товарів та послуг, державних витрат на купівлю товарів[3] та послуг, валових інвестицій та чистого експорту. Отже, формула обчислення[11] ВВП має наступний вигляд:

$$\text{ВВП} = C + I + G + X_n$$

де C — особисті споживчі витрати, які складаються з витрат домогосподарств на купівлю товарів та послуг як поточного споживання (продукти харчування, комунальні послуги і т. д.), так і тривалого (побутова техніка, автомобілі і т. д.). Але, показник C не враховує витрат на купівлю житла;

I — валові інвестиції, які складаються з витрат фірм на придбання нового устаткування, нових підприємств, нових приміщень і т. д.;

G — державні витрати на купівлю товарів та послуг, які складаються з витрат на школи, вищі навчальні заклади, армію, дороги, державний апарат управління державою. Але в показник G не включаються трансфертні виплати, а саме витрати держави на виплати пенсій, соціального страхування, різні виплати населенню;

X_n — чистий експорт товарів та послуг, який розраховується як різниця між експортом та імпортом. Примітно, що від'ємним може бути тільки показник X ", тому що в деяких країнах імпорт перевищує експорт.

Наведену формулу розрахунку ВВП за витратами ще називають основною макроекономічною тотожністю.

2) За доходами:

Під час розрахунку валового внутрішнього продукту за доходами підсумовуються різні доходи тих, хто вклав свої людські та грошові ресурси у виробництво певного товару. Основні види доходів: оплата праці найманим працівникам (заробітна плата), прибуток фірм, рента (орендна плата за користування землею, приміщенням і т. д.), відсоток (плата за користування капіталу). До інших видів доходів можна віднести непрямі податки, а саме: податок на додану вартість, а також податок на прибуток фірм. Таким чином, формула розрахунку ВВП за доходами має такий вигляд:

$$\text{ВВП} = W + P + R + i$$

де W — оплата праці найманих працівників, до якої належать заробітна плата, премії та надбавки до сплати податків;

P — прибуток фірм до сплати податків;

R — рента, тобто плата за користування землею, приміщеннями, тощо;

i — відсоток, тобто плата за користування капіталом.

Кінцевий результат усіх методів розрахунку ВВП повинен дорівнювати один одному. Отже

$$C + I + G + X_n = W + P + R + i.$$

3) Виробничий, або за доданою вартістю:

При розрахунку валового внутрішнього продукту виробничим методом підсумовується вартість, яка додана на кожній[11] стадії виробництва кінцевого товару чи послуги. Додана вартість - це ринкова ціна обсягу продукції, виробленої фірмою, за винятком вартості використаних у процесі виробництва матеріалів та сировини.

$$\text{ВВП} = \sum(\text{ВВ} - \text{МВ}) + (\text{П} - \text{С})$$

ВВ – валовий випуск – обсяг реалізованої продукції.

МВ – матеріальні витрати.

П – податки.

С – субсидії.

Як уже було сказано, ВВП - це результат виробництва різних фірм, організацій за один рік. Усі названі суб'єкти господарчої діяльності перебувають на території даної країни, тобто є її резидентами. Однак не всі працівники фірм є резидентами. Дуже багато іноземців працюють на фірмах даної країни, тобто є нерезидентами, і вони висилають частку своїх

доходів у свою рідну країну. Так само громадяни даної країни можуть одержувати частину доходів за свою виробничу діяльність із-за кордону у вигляді заробітної плати. Тому для того, щоб уникнути подвійного включення означених доходів та витрат у ВВП, потрібен такий показник, як валовий національний продукт (ВНП). Формула розрахунку ВНП має такий вигляд:

$$\text{ВНП} = \text{ВВП} + \text{ЧФД}$$

ЧФД – чисті факторні доходи, це різниця між економічними доходами, переданими за кордон та економічними доходами отримані із-за кордону.

Інші макроекономічні показники, які характеризують економічне становище країни: чистий національний продукт (ЧНП), національний доход (НД), особистий дохід, особистий дохід після сплати податків (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 - Формули розрахунку макроекономічних показників

Макроекономічний показник	Формула розрахунку макроекономічного показника
Чистий національний продукт (ЧНП)	$\text{ЧНП} = \text{ВНП} - \text{обсяг спожитого капіталу (амортизація)}$
Національний дохід	$\text{НД} = \text{ЧНП} - \text{непрямі податки}$
Особистий дохід	$\text{Особистий дохід} = \text{НД} - \text{виплати на соціальне страхування} - \text{податки на прибуток фірм} - \text{прибуток фірм} + \text{трансфертні виплати}$
Особистий дохід після сплати податків	$\text{Особистий дохід після сплати податків} = \text{Особистий дохід} - \text{податки на оплату праці}$

1.4 Методи прогнозування

Макроекономічні прогнози розробляються із застосуванням певних методів і методик, вивченням яких займається наука, що називається економічною прогностикою. [5]

Економічна прогностика — прикладна наука про способи і методи розробки економічних прогнозів.

Методи прогнозування — це сукупність операцій і прийомів, які на основі ретроспективних даних, екзогенних (зовнішніх) та ендогенних (внутрішніх) зв'язків об'єкта прогнозування, а також їхніх змін дають можливість передбачати майбутній його розвиток.

Макропрогноз має включати три основні елементи: ціль, способи її реалізації та необхідні ресурси. Інтуїтивні методи дають можливість визначити ціль і в деяких випадках засоби її досягнення, визначення ресурсного забезпечення є завданням формалізованих методів.

Основна класифікація $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ методів економічного прогнозування за ступенем формалізації: інтуїтивні та формалізовані.

1.4.1 Експертні методи прогнозування в економіці

Експертні (інтуїтивні) в свою чергу бувають індивідуальні (анкетні, інтерв'ю, побудова сценарію, дерево цілей) та колективні (метод комісій, матричний). [8]

Методи експертної оцінки (інтуїтивні) — передбачають розробку прогнозу на основі індивідуального чи колективного опитування спеціалістів (експертів). Використовуються для аналізу і прогнозування

складних об'єктів (явищ, процесів), на розвиток яких справляють вплив багато факторів.

Індивідуальні інтуїтивні методи проводяться на основі збору інформації від окремих спеціалістів.

Анкетний метод передбачає опитування експертів за допомогою спеціально складеного переліку питань щодо майбутнього розвитку об'єкта прогнозування (анкети).

Метод написання сценарію — базується на визначенні логіки розвитку процесу чи явища, виходячи із конкретної ситуації (побудова алгоритму вирішення проблеми).

Методи колективної експертної оцінки — розробка прогнозу на основі колективного обговорення проблеми, обробки матеріалів опитування експертів, узгодження й узагальнення їхніх суджень щодо майбутнього розвитку об'єкта.

Метод "комісій" — обговорення актуальної проблеми групою спеціалістів і складання прогнозу за результатами обговорення.

Матричний метод передбачає опитування експертів, спеціальну обробку отриманої інформації і складання експертної матриці — таблиці, у якій по горизонталі зазначені напрямки дослідження (запитання для експертів), по вертикалі — експерти. На перетині рядків і стовпчиків відображені міркування спеціаліста з конкретного питання.

1.4.2 Формалізовані методи прогнозування

Формалізовані бувають екстраполяцією (пливні середні, найменші квадрати, дисперсія, регресійний аналіз, кореляції) та моделюванням (факторне, структурне, сітьове комбіноване, імітаційне). [5]

Формалізовані методи прогнозування — складання прогнозу на основі використання математичних формул та економіко-математичних моделей для визначення кількісних параметрів. Є дві групи методів: прогновної екстраполяції та економіко-математичне моделювання.

Методи прогновної екстраполяції — вивчення попереднього і сучасного стану розвитку об'єкта і перенесення закономірностей минулого і сучасного розвитку на майбутнє. Математично екстраполяцію можна зобразити за допомогою такої формули:

$$Y_i + L = f(Y_i^k \cdot L)$$

де $Y_i + L$ — значення екстрапольованого рівня (прогноз);

Y — база екстраполяції ;

L — період упередження (відрізок часу від моменту надходження останніх статистичних даних про об'єкт прогнозування до моменту, який цікавить дослідників).

Найпростішим методом екстраполяції є метод найменших квадратів, за допомогою якого встановлюються розмах коливань прогнозованих тенденції чи явища, тобто прогнозується можливий ризик неотримання прогнозного результату. Екстраполяція на основі плинних середніх використовується за умов короткострокового прогнозування.

Економіко-математичне моделювання — спосіб прогнозування, що передбачає конструювання моделі (зразка) реального процесу чи явища, які мають відбутися у майбутньому.

Економіко-математична модель — система формалізованих співвідношень, які описують основні взаємозв'язки елементів, що утворюють економічну систему.

Факторні моделі описують залежність рівня і динаміки певного економічного показника від рівня і динаміки показників-аргументів, тобто

факторів, що впливають на нього. Моделі бувають одно- і багатофакторні (прикладом може бути виробнича функція).

Структурні моделі описують зв'язки між окремими елементами, які утворюють єдине ціле або агрегат (прикладом є міжгалузевий баланс).

Комбіновані моделі досліджують характеристики як структурних, так і факторних моделей.

Сітьові моделі мають основним завданням оптимізацію прогнозних рішень за допомогою методів математичного програмування. За їх допомогою складають оптимальні програми випуску продукції за наявних ресурсів, оптимального завантаження виробництва, раціонального розвитку окремих регіонів тощо.

Імітаційні моделі відображають розвиток економіки як складної економічної системи (наприклад, модель макроекономіки — система національних рахунків, модель структури економіки тощо).

1.5 Висновки до першого розділу

В нашій час існує багато методів прогнозування макроекономічних показників, основні з яких експертні(інтуїтивні) та формалізовані. Оскільки на розвиток тих чи інших економічних процесів впливають багато чинників, то в кожному випадку підходить та чи інша модель. Використовуються навіть методи експертної оцінки (інтуїтивні), що передбачають розробку прогнозу на основі індивідуального чи колективного опитування спеціалістів (експертів). Формалізовані методи прогнозування розроблені на основі використання математичних формул та економіко-математичних моделей для визначення кількісних параметрів.

2 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ

В даному розділі розглядаються наступні математичні методи прогнозування макроекономічних показників: експоненційне згладжування, Хольта, Брауна, Бокса-Дженкінса, Тейла-Вейджа. Також розглядається як будується прогноз на практиці, основні методи вибору коефіцієнтів та пошук похибки прогнозу.

2.1 Часові ряди і стохастичні процеси

Часовий ряд - це безліч спостережень, одержуваних послідовно в часі. Якщо час змінюється дискретно, часовий ряд називається дискретним. Ми будемо розглядати тільки дискретні часові ряди, в яких спостереження робляться через фіксований інтервал часу, який приймається за одиницю рахунку. Переход від моменту одного спостереження до моменту наступного спостереження будемо називати кроком.

Якщо значення членів часового ряду точно визначені якоюсь математичною функцією, то часовий ряд називається детермінованим. Якщо ці значення можуть бути описані тільки за допомогою розподілу ймовірностей, часовий ряд називається випадковим.

Явище, яке в часу згідно із законами теорії ймовірностей, називається стохастичним процесом. Надалі будемо називати його просто процесом. Аналізований відрізок часового ряду може розглядатися як одна

приватна реалізація (вбірка) досліджуваного стохастичного процесу, що генерується прихованим імовірносним механізмом.

Серед стохастичних процесів виділяють клас процесів, які називаються стаціонарними. Позначимо елемент часового ряду, спостережений в момент t , через x_t . Стохастичний процес називається стаціонарним, якщо його властивості не змінюються в часі. Зокрема, він має постійне математичне очікування та постійну дисперсію, яка визначає розмах його коливань щодо середнього значення, а також постійну автоковаріацію і коефіцієнти автокореляції.

В описі часових рядів використовуються математичні моделі. Уявімо, що часовий ряд генерується деякою моделлю, можна представити у вигляді двох компонент

$$x_t = \xi_t + \varepsilon_t$$

де величина ε_t генерується випадковим неавтокорельованим процесом з нульовим математичним очікуванням і кінцевої (не обов'язково постійної) дисперсією, а величина ξ_t може бути генерована або детермінованою функцією, або випадковим процесом, або всякий їх комбінацією. Величини розрізняються характером впливу на значення наступних членів ряду. Змінна ε_t впливає тільки на значення синхронного їй члена ряду, в той час як величина ξ_t певною мірою визначає значення декількох або всіх наступних членів ряду. Через величину ξ_t здійснюється взаємодія елементів ряду. Таким чином, в ній міститься інформація, необхідна для отримання прогнозів.

Назвемо величину ξ_t рівнем ряду в момент t , а закон розвитку рівня в часі - трендом. Таким чином, тренд може бути виражений як детермінованою, так і випадковою функціями, або їх комбінацією. Стохастичні тренди мають, наприклад, ряди з випадковим рівнем або випадковим стрибкоподібним характером росту.

Наведемо приклад детермінованого тренду:

$$\xi_t = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$$

де a_1, a_2, a_3 – постійні коефіцієнти, t – час.

Приклад випадкового тренду:

$$\xi_t = \xi_{t-1} + u_t = \xi_0 + \sum_{i=0}^t u_i$$

ξ_0 – деяке початкове значення, u_i – випадкова величина.

Приклад тренду змішаного типу:

$$\xi_t = a_1 + a_2 t + u_t + q u_{t-1} + b \cdot \sin \omega t$$

a_1, a_2, q, b, ω – постійні коефіцієнти, u_i – випадкова величина.

Компоненти часового ряду ξ_t, ε_t є теоретичними величинами. Їх виділення і становить предмет аналізу часового ряду в задачі прогнозування. Оцінку майбутніх елементів ряду зазвичай роблять по прогнозній моделі. Прогнозна модель - це модель, апроксимуюча тренд. Прогнози - це оцінки майбутніх рівнів ряду, а послідовність прогнозів для різних періодів попередження $\tau = 1, 2, \dots, k$ становить оцінку тренда.

При побудові прогнозної моделі висувається гіпотеза про динаміку величини ξ_t тобто про характер тренда. Однак у зв'язку з тим, що впевненість в гіпотезі завжди відносна, розглянуті нами моделі наділяються адаптивними властивостями, здатністю до коректування вихідної гіпотези або навіть до заміни її іншою, більш адекватно (з точки зору точності прогнозів) що відображає поведінку реального ряду. [1]

2.2 Ідея методу експоненційного згладжування

Припустимо, що досліджується часовий ряд x_t . Виявлення та аналіз тенденції динамічного ряду часто проводиться за допомогою його вирівнювання або згладжування. Експоненціальне згладжування – один з найпростіших і найпоширеніших прийомів вирівнювання ряду. У його основі лежить розрахунок експоненційних середніх. Експоненціальне згладжування ряду здійснюється за рекурентною формулою

$$S_t = ax_t + \beta S_{t-1} \quad (1.1)$$

де x_t – ряд аналізованих даних, a – коефіцієнт згладжування, $0 < a < 1$, $\beta = 1 - a$, S_n – значення експоненційної середньої в момент t ;

У нашому випадку S_t – згладжене значення, яке є прогнозом, тобто $\hat{x} = S_t$

Вираз (1) ще можна переписати наступним чином

$$S_t = ax_t + (1 - a)S_{t-1} = S_{t-1} + a(x_t - S_{t-1}) \quad (1.2)$$

Експоненціальна середня на момент t тут виражена як експоненціальна середня попереднього моменту плюс частка a різниці поточного спостереження і експоненційної середньої минулого моменту.

Якщо послідовно використовувати рекурентне співвідношення (1.1), то експонентну середню S_t можна виразити через значення часового ряду x :

$$S_t = ax_t + \beta S_{t-1} = a \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i x_{t-i} + \beta^N S_0 \quad (1.3)$$

Так як $\beta < 1$, то при $N \rightarrow \infty, \beta^N \rightarrow 0$, а сума коефіцієнтів

$a \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \rightarrow 1$. Тоді

$$S_t = a \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i x_{t-i}$$

Таким чином, величина S_t виявляється зваженою сумою всіх елементів ряду. Причому ваги падають експоненціально залежно від давності («віку») спостереження. Це і пояснює, чому величина S_t названа експоненційною середньою. Якщо, наприклад, $a = 0.3$, то поточне спостереження буде мати вагу 0.3, а ваги попередніх даних складуть відповідно 0.21; 0.147; 0.1029 і т.д.

Розглянемо, ряд, генерований моделю

$$x_t = a_1 + \varepsilon_t$$

a_1 — константа, ε_t — випадкові неавтокорельовані відхилення або шум, з середнім значенням 0 і дисперсією σ^2 .

Застосуємо до нього процедуру експоненціального згладжування (1.1). Тоді

$$S_t = a \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i x_{t-i} = a \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (a_1 + \varepsilon_{t-i}) = a_1 + a \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}$$

Знайдемо математичне очікування і дисперсію

$$M(S_t) = M(x_t) = a_1$$

$$D(S_t) = M[(S_t - a_1)^2] = M \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i} \right)^2 \right] = a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \sigma^2 = \frac{a}{2-a} \sigma^2 \quad (1.4)$$

Так як $0 < a < 1$, $D(S_t) < D(x_t) = \sigma^2$.

Таким чином, експоненційна середня має те ж математичне очікування, що і ряд x , але меншу дисперсію. Як видно з (1.4), при високому значенні a дисперсія експоненційної середньої незначно відрізняється від дисперсії ряду x . Чим менше a , тим більшою мірою скорочується дисперсія експоненційної середньої. Отже, експоненціальне згладжування можна представити як фільтр, на вхід якого у вигляді потоку послідовно надходять члени вихідного ряду, а на виході формуються поточні значення експоненційної середньої. І чим менше a , тим більшою мірою фільтруються, по переважній коливання вихідного ряду.

Після появи робіт Р. Брауна експоненціальна середня часто використовується для короткострокового прогнозування. У цьому випадку передбачається, що ряд генерується моделлю

$$x_t = a_{1,t} + \varepsilon_t$$

$a_{1,t}$ – варіаційний в часі середній рівень ряду;

ε_t – випадкові неавтокорельовані відхилення з нульвим математичним очікуванням 0 і дисперсією σ^2 .

Прогнозна модель має вигляд

$$\hat{x}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t}$$

$\hat{x}_\tau(t)$ – прогноз, зроблений у момент t на τ одиниць часу (кроків) вперед;

$\hat{a}_{1,t}$ – оцінка $a_{1,t}$

Засобом оцінки єдиного параметра моделі служить експоненціальна середня $\hat{a}_{1,t} = S_t$. Таким чином, всі властивості експоненційної середньої поширюються на прогнозну модель. Зокрема, якщо S_{t-1} розглядати як прогноз на 1 крок вперед, то у виразі (1.2) величина $(x_t - S_{t-1})$ є похибка цього прогнозу, а новий прогноз S_t виходить в результаті коригування попереднього прогнозу з урахуванням його помилки. У етом.і складається суть адаптації.

Таким чином, з одного боку, слід збільшувати вагу більше свіжих спостережень, що може бути досягнуто підвищенням a , з іншого боку, для згладжування випадкових відхилень величину a потрібно зменшити. Як бачимо, ці дві вимоги знаходяться в суперечності. Пошук компромісного значення a становить завдання оптимізації моделі. [1]

2.2.1 Визначення початкових значень параметрів згладжування

Щоб визначити параметри $\hat{a}_{1,1}, \hat{a}_{2,1}$ існує декілька підходів

1) При $t=1$



$$\hat{a}_{1,1} = a_1 \cdot x_1$$

$$\hat{a}_{2,1} = a_2 \cdot \hat{a}_{1,1}$$

2) Використовуючи метод МНК та декілька перших значень вектора з рівняння

$$S_n = a \sum_{j=0}^{n-1} (1-a)^j x_{n-j}$$

можна обчислити значення параметрів $\hat{a}_{1,1}, \hat{a}_{2,1}$

3) Якщо розглянути горизонти прогнозування на 0 та 1 кроків, то можна отримати наступні рівняння. При $t = \hat{x}_1 = \hat{a}_{1,1}$

$$\hat{x}_2 = \hat{a}_{1,1} + \hat{a}_{2,1}$$

Нехай $\hat{x}_1 = x_1, \hat{x}_2 = x_2$ тоді можна отримати $\hat{a}_{1,1}, \hat{a}_{2,1}$ у момент часу $t=2$ у вигляді

$$\hat{a}_{1,2} = x_1$$

$$\hat{a}_{2,2} = x_2 - x_1$$

2.3 Основні методи вибору коефіцієнта експоненційного згладжування a

Вибору величини постійної згладжування слід приділяти особливу увагу. Пошуки повинні бути спрямовані на відшукання підстав для вибору найкращого значення. Потрібно враховувати умови, за яких ця величина повинна приймати значення, близькі то одному крайнього значенням, то іншому. Значення параметру a впливає на результати прогнозу. Якщо значення a близьке до одиниці, то при прогнозуванні враховується в основному вплив останніх спостережень; якщо a близьке до нуля, то ваги, за якими зважуються рівні ряду, спадають повільно, що дозволяє врахувати минулі значення. Тому величиною a слід давати те чи інше проміжне значення між 0 і 1 залежно від конкретних властивостей динамічного ряду.

В якості компромісу Р. Браун рекомендує брати a в межах від 0,1 до 0,3. Та все ж таки на практиці найбільша точність прогнозу може бути отримана при будь якому значенні a .

Інколи параметр a вибирають за формулою:

$$a = \frac{2}{m + 1}$$

де m - кількість спостережень, які входять в інтервал згладжування.

Можна вибирати значення a , використовуючи таку ітеративну процедуру "Пошуку по сітці значень":

Вибрати один із критеріїв оцінки якості прогнозу, наприклад середньої квадратичної похибки, або будь який інший.

Розбити область зміни параметра a на значення, які змінюються з певним кроком, наприклад з кроком 0.1. Тоді отримаємо підмножину значень a , яка дорівнює: $[0; 0.1; 0.2; \dots; 0.9; 1]$.

Вибрати початкове наближення, наприклад $S_0^1(x) = x_1$

Для кожного значення a з побудованої підмножини провести розрахунок методом експоненційного згладжування.

Розрахувати значення одного з обраних критеріїв:

5.1. Середньоквадратична похибка

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^T (x_i - \hat{x})^2}$$

5.2. Абсолютна похибка

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \hat{x}_i|$$

5.3. Відносна похибка

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|x_i - \hat{x}_i|}{|x_i|}$$

Потрібно вибрати a , у якого найменше значення одного з критеріїв.

Звичайно, такий спосіб полегшує завдання вибору параметра згладжування, але має деякі незручності:

необхідно зберігати весь ряд спостережень, а не лише попереднє значення прогнозу методу експоненційного згладжування.

метод вимагає великої кількості обчислень, а також необхідно зберігати прогнозні значення та помилки прогнозу для усіх значень a .

2.3.1 Зауваження щодо вибору коефіцієнта згладжування

Якщо в результаті випробувань виявлено, що найкраще значення константи a близько до одиниці ($a \rightarrow 1$, випадок наївної моделі $x_m(t) = S_t = x_t$, тобто прогноз на будь-який термін дорівнює поточному значенню ряду), то слід перевірити законність вибору моделі даного типу. Часто до більших значень a приводить наявність в досліджуваному ряді яскраво виражених тенденцій або сезонних коливань. У цьому випадку для отримання ефективних прогнозів потрібна інша модель. [1]

2.4 Моделі лінійного росту

Якщо часовий ряд має тенденцію лінійного росту, то модель експоненційної середньої призводить до зміщених прогнозів, тобто отримують систематичну помилку. Щоб вирішити цю проблему розроблено кілька варіантів адаптивних моделей, які також використовують алгоритм експоненціального згладжування. В основі моделей лежить гіпотеза про те, що прогноз може бути отриманий з рівняння

$$\hat{x}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau \cdot \hat{a}_{2,t}$$

де $\hat{a}_{1,t}$ і $\hat{a}_{2,t}$ оцінки коефіцієнтів адаптивного полінома першого порядку, а τ - горизонт прогнозування.

2.4.1 Модель Хольта

Однією з перших моделей лінійного типу була двопараметричного модель Ч. Хольта, в якій оцінка коефіцієнтів проводиться таким чином:

$$\hat{a}_{1,t} = a_1 x_t + (1 - a_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1})$$

$$\hat{a}_{2,t} = a_2(\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - a_2)\hat{a}_{2,t-1}$$

$a_1, a_2 \in (0; 1)$ – параметри експоненційного згладжування або параметри адаптації.[4]

Формули ще можна записати у вигляді

$$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} - \hat{a}_{2,t-1} + a_1 e_t$$

$$\hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + a_1 a_2 e_t$$

$e_t = x_t - \hat{x}_{t-1}(t-1)$ - це похибка прогнозу.[1]

2.4.2 Побудова прогнозу часового ряду

Обчисливши значення коефіцієнтів $\hat{a}_{1,t}, \hat{a}_{2,t}$ на момент часу t можна будувати прогноз $\hat{x}(t + \tau)$, тобто в момент часу на τ кроків вперед (горизонт τ) за формулою

$$\hat{x}(t + \tau) = \hat{x}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}$$

Наприклад, якщо для обчислення початкових значень $\hat{a}_{1,t}, \hat{a}_{2,t}$ використовуватиметься підхід (3), то для горизонту прогнозування $\tau = 1$ отримуємо

$$\hat{x}(2 + 1) = \hat{x}_1(2) = \hat{a}_{1,2} + \hat{a}_{2,2}$$

$$\hat{a}_{1,2} = x_1$$

$$\hat{a}_{2,2} = x_2 - x_1$$

Після чого обчислюється $\hat{a}_{1,3}, \hat{a}_{2,3}$ за формулами відповідно і так далі.

$$\hat{x}_1(3) = \hat{a}_{1,3} + \hat{a}_{2,3}$$

Наприклад, при різних значеннях t прогноз обчислюється як $t=1$

$$\hat{x}_0(1) = \hat{a}_{1,1}$$

$$\hat{x}_1(1) = \hat{a}_{1,1} + \hat{a}_{2,1}$$

Похибка

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2}$$

2) $t=2$

$$\hat{a}_{1,2} = a_1 x + (1 - a_1)(\hat{a}_{1,1} + \hat{a}_{2,1})$$

$$\hat{a}_{2,2} = a_2(\hat{a}_{1,2} + \hat{a}_{1,1}) + (1 - a_2)\hat{a}_{2,1}$$

Прогноз

$$\hat{x}_1(2) = \hat{a}_{1,2} + \hat{a}_{2,2}$$

Похибка

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 + (x_3 - \hat{x}_3)^2}$$

2.4.3 Модель лінійного росту Брауна

Окремим випадком моделі Хольта є модель лінійного росту Брауна[7]:

$$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1} + (1 - \beta^2)e_t$$

$$\hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + (1 - \beta)^2 e_t$$

де параметр β - коефіцієнт дисконтування, що характеризує[6] зменшення цінності даних спостережень за одиницю часу, $0 < \beta < 1$

Якщо модель Хольта змінити завдяки включенню різниці похибок, то отримаємо повну трьох параметричну модель прогнозування Дж. Бокса і Г. Дженкінса[1]:

$$\hat{x}_t(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau \hat{a}_{2,t}$$

$$\hat{a}_{1,t} = a_1 x_t + (1 - a_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}) + a_3(e_t - e_{t-1})$$

$$\hat{a}_{2,t} = a_2(\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - a_2)\hat{a}_{2,t-1}$$

де a_1, a_2, a_3 - параметри моделі, $0 < a_1, a_2, a_3 < 1$, похибка прогнозування $e_t = x_t - \hat{x}_{t-1}$

На основі практичних експериментів моделі на часових рядах Бокс і Дженкінс надійшли висновку, що включення в модель різниці похибок не є

необхідним. Коефіцієнт a_3 завжди наближається до нуля. П. Харрісон надійшов того ж самого висновку. [1]

Такий результат пояснюється стохастическим характером даних, і, зокрема, тим, що кореляція помилок у подібних випадках нестійка.

Харрісон емпіричне порівняння одно параметричної моделі Брауна з багатопараметричними моделями. Багатопараметричні моделі в жодному випадку не дали будь якої суттєвої переваги. Саме тому на практиці для прогнозування рядів з лінійною тенденцією переважно використовують більш просту модель Брауна. З теоретичного співставлення різних моделей, виконані Харрісоном і Вардом, витікає аналогічний висновок. До позитивних характеристик метода Брауна також можна віднести наступні — логічна, ясна та легка для розуміння концепція; оптимальне значення єдиного параметра можна швидко знайти емпіричним шляхом; коефіцієнти моделі прогнозування оцінюються сумісно таким чином, щоб зменшити автокореляцію в залишках. Все це робить модель Брауна легкою при використанні.

2.4.4 Модель Тейла-Вейджа

Г. Тейл і С. Вейдж при вивченні експоненційної середньої, з метою подальшого вивчення властивостей адаптивних моделей[9] запропонували використати двохпараметричний предиктор Хольта для прогнозування деякого ймовірнісного процесу, що характеризується стохастичним трендом. Вони розробили формули для визначення оптимальних параметрів адаптації, що мінімізують середній квадрат похибки прогнозування.

Процес Тейла-Вейджа в аналітичному вигляді записується як:

$$x_t = a_{1,t} + \varepsilon_t$$

$$a_{1,t} = a_{1,t-1} + a_{2,t} \quad (1.12)$$

$$a_{2,t} = a_{2,t-1} + v_t$$

де $a_{1,t}$ - значення рівня часового ряду x_t , що досліджується в момент часу t ;

$a_{2,t}$ - приріст рівня від моменту $t-1$ до моменту t ;

ε_t, v_t - часові послідовності з нульовими математичним очікуванням, сталими дисперсіями та відсутніми коваріаціями, тобто:

$$M(\varepsilon_t) = M(v_t) = 0$$

$$M(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases}$$

$$M(v_t, v_{t'}) = \begin{cases} \sigma_v^2 & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases}$$

$$M(v_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \text{ виконується для будь-якої пари } (t, t')$$

Часовий ряд x_t не є стаціонарним і не має строго визначеної автоковаріаційної функції. Однак М. Нерлов та С. Вейдж показали, що з рівнянь (1.12) виходить стаціонарність других різниць процесу x_t , які ми позначимо як y_t :

$$y_t = (x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2}) = \nabla^2 x_t = \nabla^2 a_{1,t} + \nabla^2 \varepsilon_t = v_t + \nabla^2 \varepsilon_t$$

$$\nabla - \text{різнецевий оператор, } \nabla x_t = x_t - x_{t-1}, \nabla^2 x_t = \nabla(\nabla x_t)$$

Інші різниці[1] мають цілком визначену автоковаріаційну функцію

$$\text{cov}_{yy}(k) = M(y_t, y_{t-k}) = \begin{cases} (g^2 + 6)\sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ -4\sigma_\varepsilon^2 & |k| = 1 \\ \sigma_\varepsilon^2 & |k| = 2 \\ 0, & |k| > 2 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$g^2 = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$

Ці властивості можуть бути використані для вирішення питання про можливість адекватного представлення часового ряду, що спостерігається, процесом Тейла-Вейджа. При цьому необхідно враховувати, що оцінки автоковаріаційної функції досить грубі і корельовані, а рівності (1.13) на практиці будуть виконуватися досить наближено. Схема побудови прогнозу у відповідності до формул (1.10) виглядає наступним чином:

$$\hat{a}_{1,t} = a_1 x_t + (1 - a_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}) \quad (1.14)$$

$$\hat{a}_{2,t} = a_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - a_2)\hat{a}_{2,t-1} \quad (1.15)$$

$$\hat{x}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau \hat{a}_{2,t}$$

$$0 < a_1, a_2 < 1$$

Якщо похибку прогнозу, зробленого в момент часу t на один крок вперед, позначити через $e_1(t)$, то рівняння адаптації (1.14) та (1.15) можна представити у вигляді:

$$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1} + a_1 e_1(t-1)$$

$$\hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + \gamma e_1(t-1)$$

$$\gamma = a_1 a_2$$

Похибка прогнозу:

$$e_1(t) = x_{t+1} - \hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{2,t} = (\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t} + v_{t+1} + \varepsilon_{t+1}) - \hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{2,t} = \\ (a_{1,t} - \hat{a}_{1,t}) + (a_{2,t} - \hat{a}_{2,t}) + v_{t+1} + \varepsilon_{t+1}$$

З цього слідує що похибка прогнозу є сума трьох компонент: похибки оцінки рівня процесу в момент часу t , похибки оцінки приросту рівня в момент часу t та комбінації випадкових компонент v та ε в момент часу $t+1$.

Проблема визначення оптимальних a , та γ еквівалентно пошуку оптимальних a_1 , та a_2 . Зазвичай оптимум шукають шляхом мінімізації середньої квадратичної похибки прогнозу. Але коли розглядаються нестационарні часові ряди, то в загальному випадку не очевидно, що середній квадрат похибок прогнозування адаптивним методом є величиною стійкою, що може бути мінімізована. Використовуючи співвідношення

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{x}_{t+1} - 2x_t + x_{t-1}$$

Нерлов і Вейдж показали, що проблема прогнозування x_{t+1} еквівалентна задачі прогнозування другої різниці y_{t+1} , більш того при обмеженнях, накладених на параметри адаптації a_1 та a_2 похибка прогнозу являється лінійною комбінацією поточного та попередніх значень стаціонарного ряду y_t :

$$e_1(t) = y_{t+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k y_{t-k}$$

$\{\omega\}$ – ряд ваг, що сходиться.

Це означає, що похибки прогнозу стаціонарні, а їх середній квадрат цілком визначений.

В результаті мінімізації дисперсії похибки прогнозу на один крок вперед $D_e(1)$ Тейл і Вейдж отримали наступні результати:

$$a_1 = \frac{2h}{1+h}, \quad a_2 = h, \quad \gamma = \frac{2h^2}{1+h}$$

$$h = \sqrt{\left(-\frac{1}{8}g^2 + \frac{1}{2}g \sqrt{1 + \frac{1}{16}g^2}\right)}$$

$$g^2 = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$

$$D_e(1) = \frac{1+h}{1-h} \sigma_\varepsilon^2$$

Груба оцінка співвідношення дисперсій може бути отримана з співвідношень (1.13) по підрахованими автоковаріаціям процесу y_t . Уточнення g^2 проводиться експериментально методом проб на наявному відрізку ряду. Даючи значення в околицях грубої оцінки, знаходять g^2 , що і мінімізує $D_e(1)$ – дисперсію помилки.

Нерлов і Вейдж виконали теоретичний аналіз чутливості дисперсії похибки прогнозу $D_e(1)$ відносно похибки u визначені g^2 . Виявилось, що процентне змінення дисперсії $D_e(1)$ пропорційне квадрату відносної похибки оцінки g^2 з коефіцієнтом пропорційності

$$\frac{h(1-h)^2(6+8h+3h^2)}{4(2-h^2)^3}$$

У найбільш реальних, малих значень g навіть 50% похибка при оцінці g^2 дає збільшення в $D_e(1)$ менше ніж 1,5%.

В данному дипломному проекті при реалізації комп'ютерної програми використовувалися наступні формули для методу Тейла-Вейджа:

$$\hat{a}_{1,t} = a_1(x_t - \hat{g}_{t-1}) + (1 - a_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1})$$

$$g_t = a_2(x_t - \hat{a}_{1,t}) + (1 - a_2)\hat{g}_{t-1}$$

$$\hat{a}_{2,t} = a_3(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - a_3)\hat{a}_{2,t-1}$$

a_1, a_2, a_3 – параметри згладжування моделі Тейла-Вейджа шукаються по сітці значень при цьому вважається, що $a_1, a_2, a_3 \in (0; 2)$

Прогноз обчислюється за формулою

$$\hat{x}_t(t) = \hat{a}_{1,t} + \hat{g}_t + \tau \hat{a}_{2,t}$$

$\hat{a}_{1,t}, \hat{a}_{2,t}$ - оцінки коефіцієнтів адаптивного полінома першого порядку,

τ – горизонт прогнозування, g_t – адитивний коефіцієнт сезонності.

Початкові умови, а тобто коефіцієнти $a_{1,0}, a_{2,0}$ шукаються по перших п'яти значенням часового ряду x , як рішення лінійного рівняння $\hat{x}(t) = \hat{a}_{1,t} + t\hat{a}_{2,t}$ із використанням методу найменших квадратів.

2.5 Висновки до другого розділу

Будь який макроекономічний процес можна представити у вигляді часового ряду, що є безліч спостережень, одержуваних послідовно в часі. Тому у якості отримання прогнозу використовуються формалізовані методи у яких вихідними даними є часовий ряд. В залежності від характеру макроекономічних процесів прогноз буде найкращим використовуючи ту чи іншу математичну модель. Прогноз отримується у вигляді часового ряду на наступні періоди часу.

3 ПРОГРАМА ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ

В даному розділі розглядається робота програми та основні її вимоги, опис інтерфейсу користувача, вибір методу прогнозування, побудова графіку прогнозу, перевірка програми на контрольних прикладах та прогнозування валового внутрішнього продукту України.

3.1 Основні вимоги використання програми

У програмному виробі необхідно формування історії роботи, що значно полегшує прогнозування на наступні періоди.

Вимоги до складу і параметрів технічних засобів:

- Процесор - 0.9 ГГц;
- Об'єм оперативної пам'яті – 128 МБ;
- Дискаова підсистема - 200 МБ вільного місця.

Вимоги до інформаційної і програмної сумісності:

Програма повинна підтримувати спільний режим роботи з операційними системами Windows 98 і вище. Програмний продукт розроблюється в середовищі Microsoft Visual Studio 2012 з використанням вбудованої мови програмування C#. Програма може мати розширення функціоналу.

Програмний продукт повинний зберігати працездатність і забезпечувати відновлення своїх функцій при виникненні наступних ситуацій:

- При помилках, пов'язаних з програмним забезпеченням (ОС і драйвери пристроїв), відновлення працездатності в цьому випадку виконується ОС.

- При помилках в роботі з програмним продуктом, а саме некоректно введені або взагалі не введені дані. Виводиться вікно в якому повідомляється про це.

Умови експлуатації:

Необхідно виконання норм техніки безпеки для виробничих приміщень, а саме температура і відносна вологість повітря. Користувачу необхідно мати навички роботи з ЕОМ і знання в області економіки.

3.2 Вибір методу прогнозування

У кожному випадку підходить та чи інша математична модель для прогнозування. В даній роботі використовуються наступні методи: експоненційне згладжування, Хольта, Брауна, Бокса-Дженкінса, тренди першого та другого порядків.

Якщо часовий ряд має тенденцію лінійного росту, то модель експоненційної середньої призводить до зміщених прогнозів, тобто отримують систематичну помилку. Щоб вирішити цю проблему розроблено кілька варіантів адаптивних моделей, які також використовують алгоритм експоненціального згладжування. Результат прогнозування перевіряють через похибку прогнозу. Вибір методу у програмі наведено на рис 3.1.

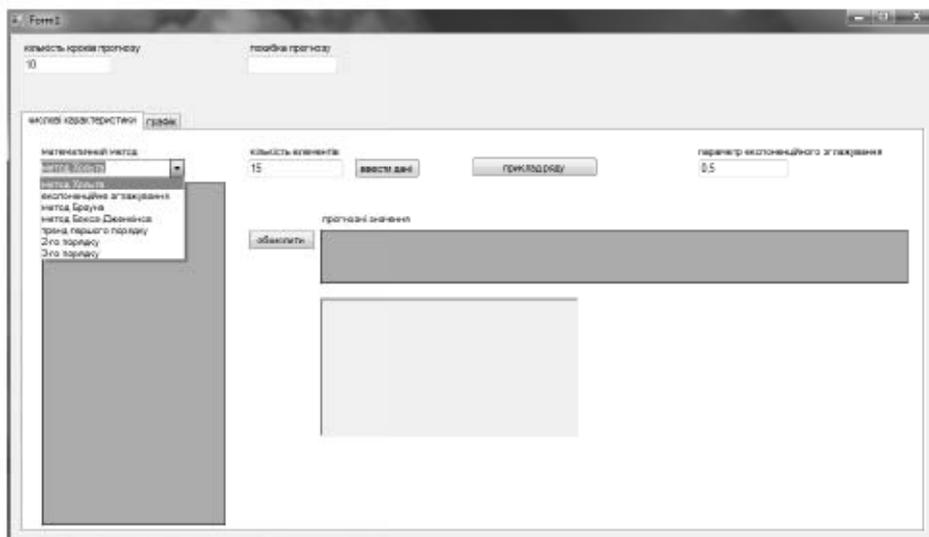


Рисунок 3.1 - Вибір методу прогнозування

Вибравши кількість кроків прогнозу(горизонт прогнозування) та натиснувши кнопку “Обчислити” шукаються “згладжені значення”, та прогноз на задану кількість кроків. Якщо дані введено не коректно, то повідомляється про помилку.

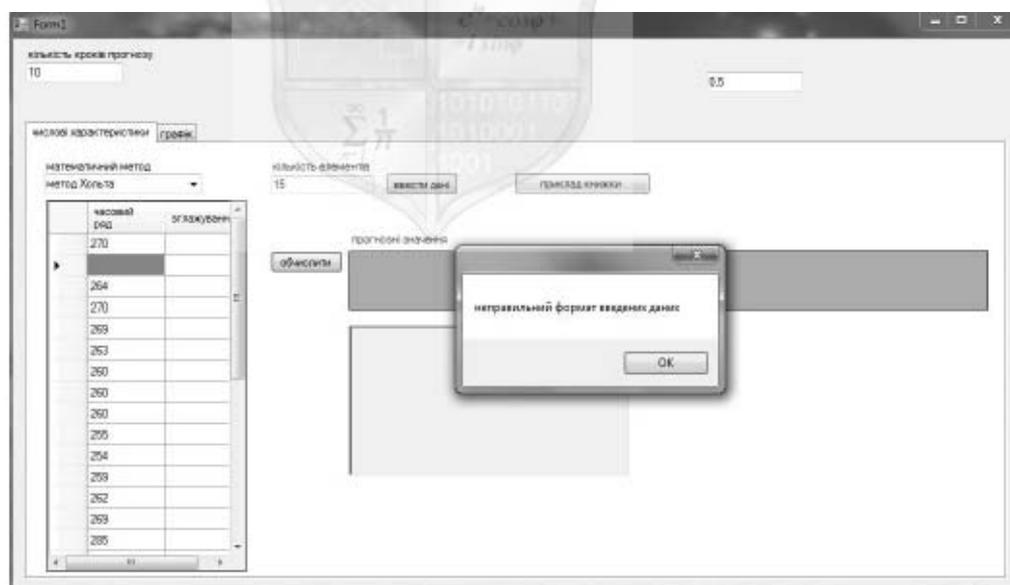


Рисунок 3.2 - Повідомлення про помилку

3.3 Вибір початкової вибірки та горизонту прогнозування

В поле під записом “кількість кроків прогнозу” вводиться горизонт прогнозування, у поле під записом “кількість елементів” вказується розмір початкової вибірки. Вибірка водиться у стовбець із назвою “часовий ряд”.

3.4 Вивід результатів прогнозування

Прогнозні короткострокові значення з горизонтом прогнозування $\tau = 1$ виводяться у стовбець “згладжені значення”, а прогноз часового ряду з введеним τ виводяться під записом “прогнозні значення”.

кількість кроків прогнозу: 10

масивка прогнозу: 15.8755917775901

числові характеристики | графік

математичний метод: метод Хольта

кількість елементів: 15

параметр експоненціального згладжування: 0.5

часовий ряд	згладжені
270	189
257	247.9
264	271.8
270	282.1
269	282.7
263	276.8
260	271
260	267.7
260	265.7
255	260.8
254	257.8
259	259.8
262	262.5
269	268.1
285	281.1

прогнозні значення

304.5	306.5	308.4	310.4	312.4	314.4	316.4
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

обчислити

Рисунок 3.3 - Прогнозні значення часового ряду

Під час обчислення використовуючи тренд першого та другого порядку значення функції $y = f(t)$ виводяться під прогнозними значеннями.

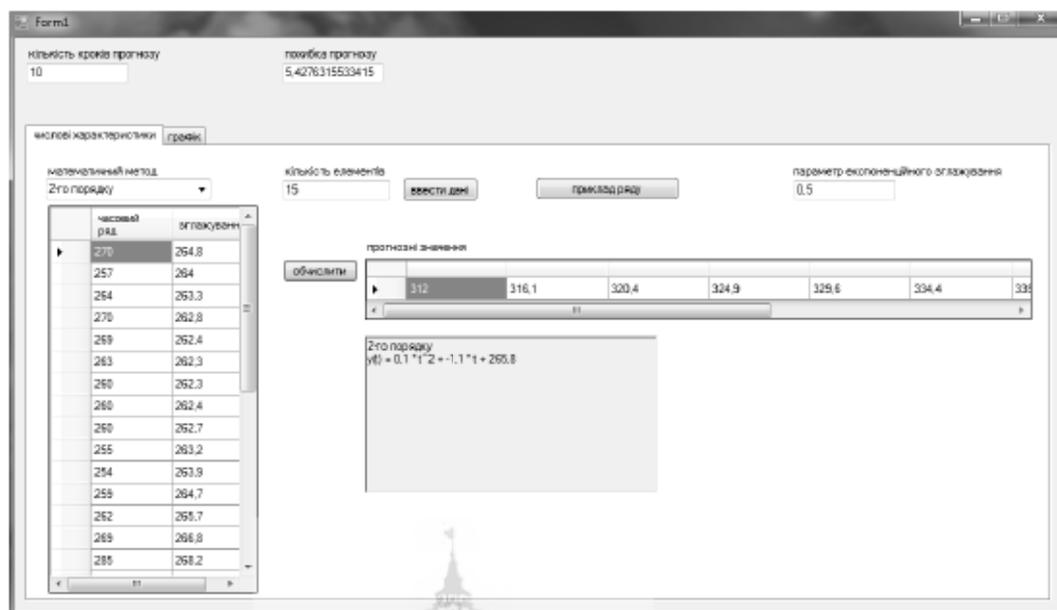


Рисунок 3.4 - Тренд 2-го порядку

3.5 Графіки часових рядів

Переходячи на вкладку “графіки” відразу автоматично будується реальний та прогнозний ряд, відповідно до введених даних.

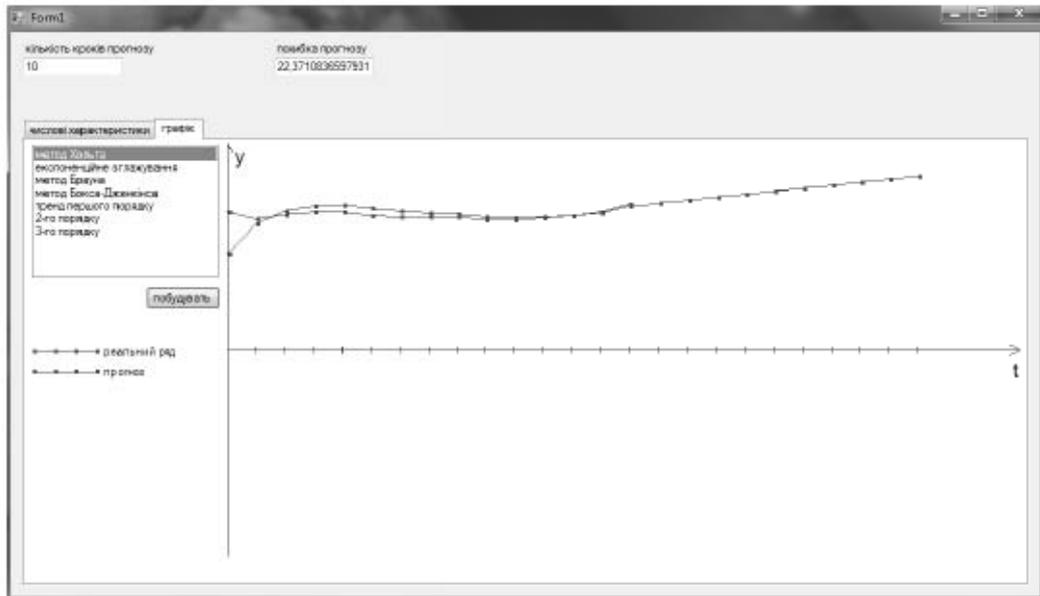


Рисунок 3.5 - Графіки часових рядів

Щоб змінити математичний метод пошуку прогнозних значень необхідно переключитись на відповідний метод прогнозування та натиснути кнопку “побудувати”. У числових характеристиках числові значення змінюються автоматично в залежності від обраного методу.

3.6 Контрольні приклади

Контрольний приклад №1

Наприклад у нас дані генеруються за формулою

$$y = 14 + 5k + \xi(t)$$

$\xi(t)$ – випадкова величина з нульвим математичним очікуванням та одиничною дисперсією.

Таблиця 3.1 - Приклад тренду першого порядку

t	y
1	19
2	25
3	28
4	35
5	38
6	44
7	50
8	53
9	58
10	65

Методом найменших квадратів отримуємо результат[13].

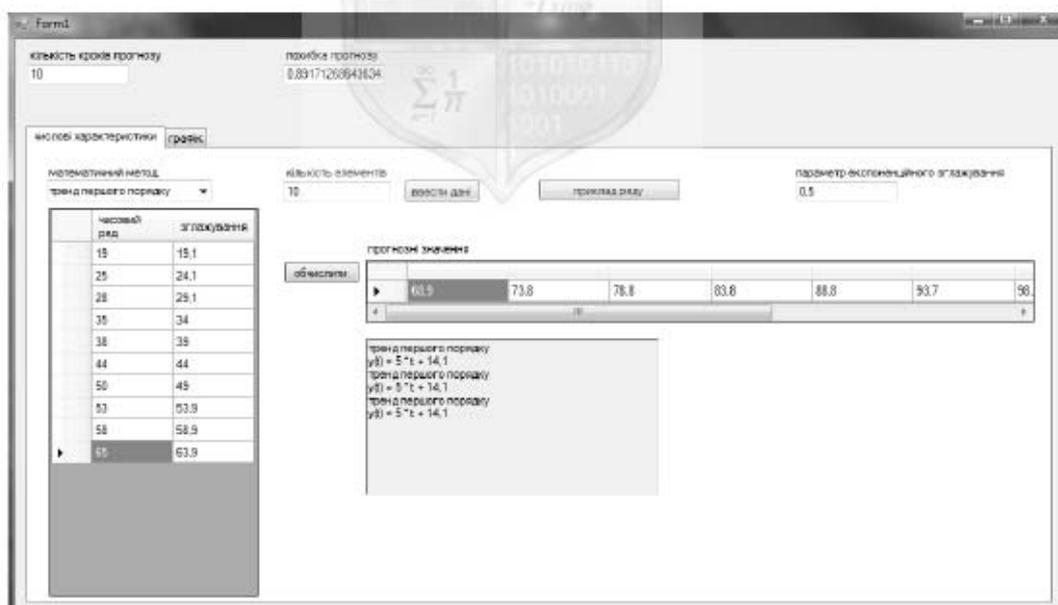


Рисунок 3.6 - Тренд першого порядку

Контрольний приклад №2

Наприклад у нас дані генеруються за формулою

$$y = 14 + 5k + 8k^2 + \xi(t)$$

$\xi(t)$ – випадкова величина з нульвим математичним очікуванням та одиничною дисперсією.

Таблиця 3.2 - Тренд другого порядку

t	Y
1	28
2	56
3	100
4	162
5	238
6	332
7	441
8	567
9	707
10	864

кількість кроків прогнозу: 10

похибка прогнозу: 0.56835754958215

числові характеристики | графік

математичний метод: 2-го порядку

кількість елементів: 10

параметр експоненційного згладжування: 0,5

часовий ряд	згладжування
28	27,4
56	56,1
100	100,9
162	161,8
238	238,7
332	331,7
441	440,8
567	566
707	707,2
864	864,5

прогнозовані значення

1037,9	1227,4	1432,9	1654,5	1892,2	2146	2414
--------	--------	--------	--------	--------	------	------

обчислити

2-го порядку
 $y(t) = 8 \cdot t^2 + 4.6 \cdot t + 14.8$

Рисунок 3.7 - Тренд 2-го порядку

Методом найменших квадратів отримаємо результат[13].

Як видно з рис 3.7 тренд 2-го порядку відповідає функції, що генерувала тестові дані.

3.7 Прогнозування економічних показників України, ВВП

У період з 1995р по 2005 роки показники ВВП України наведені до таблиці 4.3.

Таблиця 3.3 - ВВП України 1995-2005 р.

Рік	ВВП млрд. (у доларах США)
1995	37,009
1996	44,559
1997	50,152
1998	41,883
1999	31,581
2000	31,262
2001	38,009
2002	42,393
2003	50,133
2004	64,888
2005	86,183

Перевіримо ці показники у програмі.

Form1

кількість кроків прогнозу: 2 похибка прогнозу: 5,04436319167405

числові характеристики **графік**

математичний метод: метод Хольта кількість елементів: 0 параметр експоненційного згладжування: 0,5

числовий ряд	згладжування
37,009	25,9
44,559	40,5
50,152	49,4
41,883	46,4
31,581	37,6
32,262	34,6
38,008	37,4
42,393	41,4

прогнозовані значення: 43,6 45,7

тренд першого порядку:
 $y(t) = -0,7 \cdot t + 42,9$
 2го порядку:
 $y(t) = 0,1 \cdot t^2 + -2 \cdot t + 45$

Рисунок 4.5.1 - Прогнозні числові характеристики ВВП України

Як бачимо прогноз отримали трохи зміщену оцінку, тому що ВВП залежить від багатьох впливів.

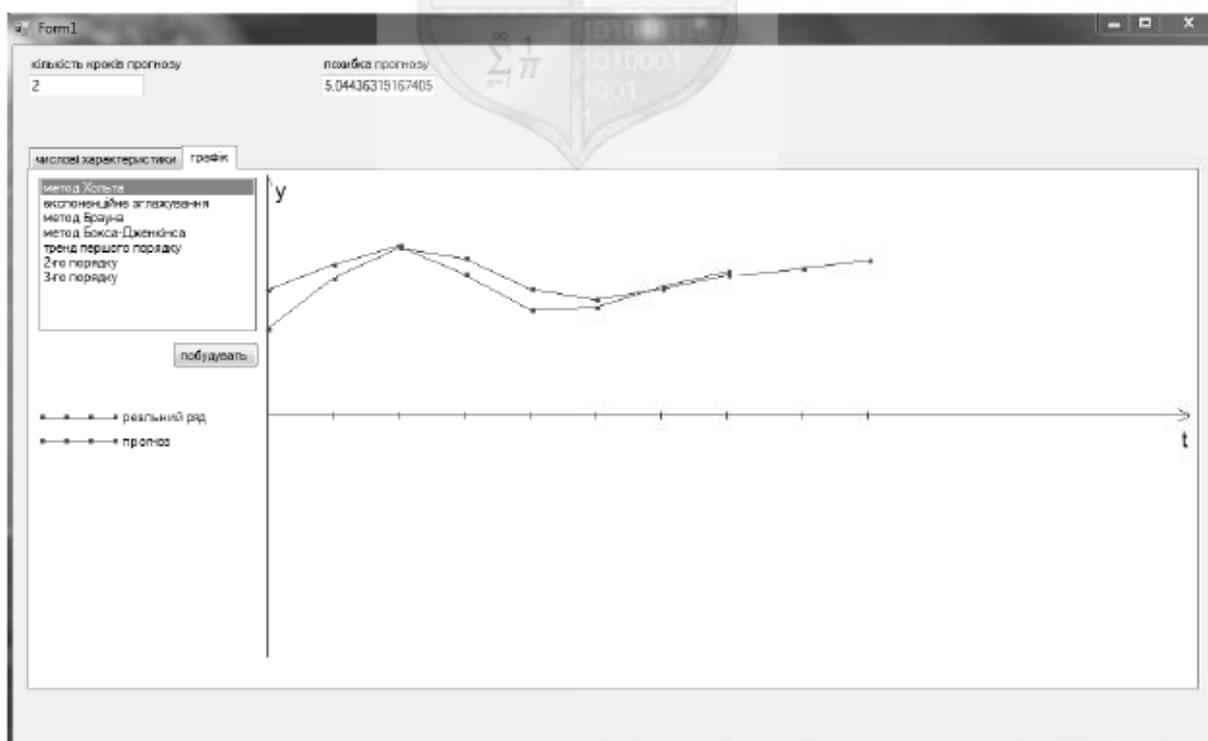


Рисунок 4.5.2 - Графік прогнозу ВВП України

На графіку видно, що модель Хольта правильно працює враховуючи попередні дані ВВП.

3.8 Висновок до третього розділу

Використовуючи дану програму можна прогнозувати ВВП України на наступні періоди. Виводиться графік реальних та прогнозних значень, по якому можна визначити як працює математична модель та про характер зміни ВВП протягом певного часу. Також обчислюється похибка прогнозу. Користувач може вибирати ту чи іншу математичну модель для прогнозу, яка найкраще підходить. Також вимагається певні знання з економіки та роботи з персональним комп'ютером. У програмі написані перевірки формату даних. Якщо користувач невірно вводить дані та обчислює прогноз, то виводиться повідомлення про помилку.

Програма працює з операційними системами Windows 98 і вище. Програмний продукт розроблюється в середовищі microsoft visual studio 2012 з використанням мови програмування C#. Програма підтримує розширення функціоналу.

У якості контрольного прикладу використовувались показники ВВП України за період 1992-2005 роки. Похибка прогнозу була незначною та залежить від кожної математичної моделі.

ВИСНОВОК

У роботі розроблено програмне забезпечення, що прогнозує макроекономічні показники України. Також програма може бути використана для прогнозування інших показників, у яких часовий ряд має однакове математичне очікування та дисперсію.

У кожному випадку підходить та чи інша математична модель для прогнозування. В даній роботі використовуються наступні методи: експоненційне згладжування, Хольта, Брауна, Бокса-Дженкінса, тренди першого та другого порядків.

Якщо часовий ряд має тенденцію лінійного росту, то модель експоненційної середньої призводить до зміщених прогнозів, тобто отримують систематичну помилку. Щоб вирішити цю проблему розроблено кілька варіантів адаптивних моделей, які також використовують алгоритм експоненціального згладжування. Результат прогнозування перевіряють через похибку прогнозу.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 415 с.
2. Навчальні матеріали [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://pidruchniki.com/15660212/politekonomiya/makroekonomika>
3. Основи економічної теорії - Козак Ю.Г. - 12.2 Методи розрахунку ВВП та інших макроекономічних показників[Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://westudents.com.ua/glavy/56418-122-metodi-rozrahunku-vvp-ta-nshih-makroekonomichnih-pokaznikv.html>
4. Holt Forecasting trends and seasons by exponentially weighted moving averages O.N.R. Memorandum, Carnegie Inst. of Technology. - 1957. - № 2.- 205 с.
5. Бібліотека економіста $\sum_{n=1}^{\infty}$ [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://library.if.ua/book/72/5247.html>
6. Brown R.G. Smoothing forecasting and prediction of discrete time series. - N.Y., 1963. — 420 с.
7. Brown R.G., Meyer R.F. The fundamental theorem of exponential smoothing. Oper. Res. - 1961.
8. Методи експертних оцінок [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://pidruchniki.com/19650323/ekonomika/metodi_ekspertnih_otstinok
9. Theil H., Wage S. Some observations on adaptive forecasting Management Science. - 1964. — 475 с.
10. Френклін Р. Рут, А. Філіпенко. Міжнародна торгівля та інвестиції. — К.: Основи, 1998. — 785 с.

11. Основи економічної теорії. Навчальний посібник. За ред. Ю.Г.Козака С.С.Шаповал – К.: ЦНЛ, 2011 – 215 с.
12. Терентьева А.В. Основные макроэкономические показатели национальной экономики – 105 с.
13. Методы и модели анализа временных рядов. Тамбов Издательство ТГТУ2008 – 15 с.
14. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление: Пер. с англ. Под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974, кн. 1. – 406 с.
15. Кузнецов Б.Т. Макроэкономика: учебное пособие 2012 год - 405 с.
16. Экономическая теория. Макроэкономика-1, 2. Метаэкономика. Экономика трансформаций: Учебник Под общ. ред. заслуженного деятеля науки, проф., д. э. н. Г. П. Журавлевой. — 3-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2012. — 920 с.
17. Кудров В.М. Мировая экономика: учебник 2009 год -240 с.